Forelesning 32 — MET1180

Plan:

1. Om eksamen
2. Gjennomgang MET11807 05/2019

1. Om eksamen

hvordan
- leveres som en PDF, håndskrevet
- leveres på wiseflow
  - større filstørrelse – ikke problem med topp/kamming
  - mulig å teste på forhånd
  - kommer epost fra BI / melding på It's
- hvordan besvarelsen skrives er viktig

Eksamentid: 5t (vanlig) + 1t (flervalg) + 1t (innlevering)

Vurdering: 40% – 60% for å bestå
helhetsvurdering
begrunnelser er viktige

hva
Oppgaver: (19-20 opps.) lik vekt.
- mange av oppgavene blir omtrent som før
- det blir flere oppgaver fra hverken person, ikke flervalg.
- det kommer til å være oppgaver som er sitt geometriske

tema:
- integrasjon
- matriseregning
- funksjoner i flere variabler
- nåverdi beregning (diskret tid / kont. tid)
- derivasjon og anvendelser (maks/min, vekstende/avt., konveks/konkav, tangent)
- funksjoner og grafer (linjer, sirkler/ellipser, paraboler, hyperbler, asymptoter)

(2) Gjennomgang 05/2019:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 2a & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 16 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 40 \\ 51 \end{pmatrix}$

a) $A\underline{x} = \underline{b}$: $(a=2)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 4 & 8 & 12 & 40 \\ 5 & 10 & 16 & 51 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-4) \\ \cdot(-5) \end{array}$$

utvidet matrise

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \cdot(-1) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

trappeform

$\underline{x} + 2y + 4z = 11$ $\qquad x = 11 - 2y - 4\cdot(1) = \underline{7-2y}$

$-4\underline{z} = -4$ $\qquad \underline{z=1}$

Løsning: $(x,y,z) = \underline{\underline{(7-2y, y, 1)}}$ med y fri

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 4 \\ 2a & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 16 \end{vmatrix} = 1\cdot(8\cdot16 - 10\cdot12) - a(2a\cdot16 - 12\cdot5) + 4\cdot(2a\cdot10 - 8\cdot5)$

kofaktor-utvidelse

$= 128 - 120 - 32a^2 + 60a + 80a - 160$

$= \underline{\underline{-32a^2 + 140a - 152}}$

$\underline{|A|=0}$: $-32a^2+140a-152=0$

$$a=\frac{-140\pm\sqrt{140^2-4\cdot(-32)(-152)}}{2\cdot(-32)}$$

$$=\underline{2},\ \underline{19/8}$$

$|A|=0$ for $\underline{\underline{a=2}}$ og $\underline{\underline{a=19/8}}$

c) A^{-1}: $(a=3)$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{pmatrix}^T$$

$$|A|=-32\cdot(3)^2+140(3)-152$$
$$=\underline{-20}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 6 & 8 & 12\\ 5 & 10 & 16\end{pmatrix}$$

$C_{11}=+(8\cdot16-12\cdot10)=8$ $\quad C_{12}=-(6\cdot16-5\cdot12)=-36$ $\quad C_{13}=20$

$C_{21}=-8$ $\quad C_{22}=-4$ $\quad C_{23}=5$

$C_{31}=4\cdot12$ $\quad C_{32}=12$ $\quad C_{33}=-10$

$$A^{-1}=\frac{1}{-20}\begin{pmatrix}8 & -36 & 20\\ -8 & -4 & 5\\ 4 & 12 & -10\end{pmatrix}^T=\underline{\underline{\frac{1}{-20}\begin{pmatrix}8 & -8 & 4\\ -36 & -4 & 12\\ 20 & 5 & -10\end{pmatrix}}}$$

d) $A^7 \cdot \underline{x} = \underline{b}$ har nøyaktig én løsning for $a = -1$

Bevis:

$|A^7| = |A \cdot A \cdot \ldots \cdot A|$

$= |A| \cdot |A| \cdot \ldots |A|$

$= |A|^7 \neq 0$

$\Downarrow$

$A^7 \cdot \underline{x} = \underline{b}$ har en løsning.

$A^7 \cdot \underline{x} = \underline{b}$

$\cancel{(A^7)^{-1} \cdot A^7} \cdot \underline{x} = (A^7)^{-1} \cdot \underline{b}$

$|A^7| \neq 0$

$\Rightarrow (A^7)^{-1}$ finnes

$\underline{x} = (A^7)^{-1} \cdot \underline{b}$

$= (A^{-1})^7 \cdot \underline{b}$

$= A^{-7} \cdot \underline{b}$

Pause: Starter 11.15

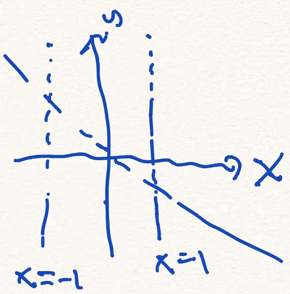
2.

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

a) Asymptoter: i) Vertikale $1-x^2=0$

$x = \pm 1$

$(\pm 1)^3 \neq 0$



$\underline{\underline{x=1}}$ og $\underline{\underline{x=-1}}$ vert. asympt.

ii) Horisontale / skrå:

$x^3 : (-x^2+1) = -x$

$-(x^3-x)$

x

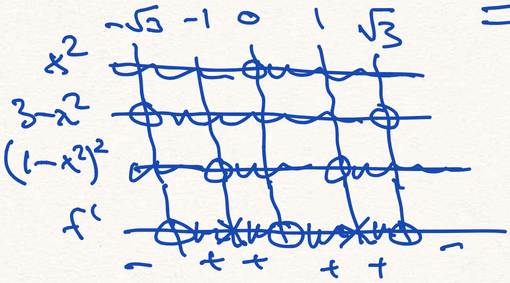
$$\frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2} \to 0 \text{ når } x \to \pm\infty$$

$\underline{\underline{y=-x}}$ skrå asymptote

b) $$f'(x) = \left(\frac{x^3}{1-x^2}\right)' = \frac{3x^2 \cdot (1-x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2} = \underline{\underline{\frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}}}$$

$\boxed{f \text{ avtagende: } f'(x) \leq 0}$



f er avtagende i $(\leftarrow, -\sqrt{3}]$

og i $[\sqrt{3}, \rightarrow)$

3.

a) $\boxed{\begin{matrix} u = 1-x \\ du = -1 \cdot dx \end{matrix}}$

$$\int 30(1-x)^5\,dx = \int 30u^5 \cdot \frac{du}{-1}$$

$$= -30\int u^5\,du = -30 \cdot \frac{1}{6}u^6 + C$$

potens-regel

$$= -5(1-x)^6 + C$$

b) $$\int \frac{12}{4-9x^2}\,dx = \int \frac{12}{(2-3x)(2+3x)}\,dx$$

Delbrøksoppspalting:

$$\frac{12}{(2-3x)(2+3x)} = \frac{A}{2-3x} + \frac{B}{2+3x}$$

$$12 = A\cdot(2+3x) + B(2-3x)$$

$$= (2A+2B) + (3A-3B)x$$

$2A+2B = 12$ $\quad 4A = 12 \quad A = B$
$3A - 3B = 0$ $\quad A = B \quad = 3$

$$= \int \frac{3}{2-3x} + \frac{3}{2+3x}\,dx$$

$$= -\ln|2-3x| + \ln|2+3x| + C$$

$$\int \frac{3}{2-3x}\,dx =$$

$\boxed{\begin{matrix} u = 2-3x \\ du = -3dx \end{matrix}}$

$$= \int \frac{\cancel{3}}{u} \cdot \frac{du}{-\cancel{3}}$$

$$-\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|2-3x| + C$$

c) $\int \frac{2e^x}{e^x - e^{-x}} dx = \int \frac{2u}{u - 1/u} \cdot \frac{du}{u}$

$\boxed{\begin{array}{l} u = e^x \\ du = e^x \cdot dx \end{array}}$

$= \int \frac{2u}{u^2 - 1} du = \ln|u^2 - 1| + C$

$\boxed{\begin{array}{l} v = u^2 - 1 \\ dv = 2u\,du \end{array}}$

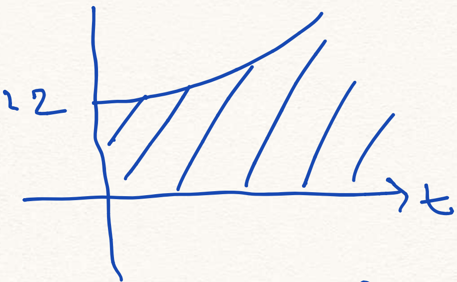
$\int \frac{\cancel{2u}}{v} \cdot \frac{dv}{\cancel{2u}}$

$= \int \frac{1}{v} dv = \ln|v| + C$

$= \ln|e^{2x} - 1| + C$

4.

a) Nåverdi av leieinntekt:



$\int_0^\infty I(t) \cdot e^{-rt} dt = \int_0^\infty 12e^{0{,}07t} \cdot e^{-0{,}10t} dt$

$I(t) = 12e^{0{,}07t}$

$r = 10\%$

$= \int_0^\infty 12\,e^{-0.03t} dt$

$$= 12 \int_0^{\infty} e^{-0.03t}\,dt$$

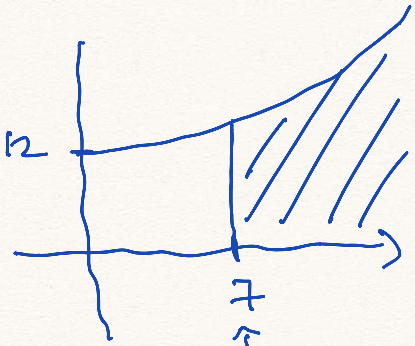
går mot 0 når $t \to \infty$

$$= 12 \cdot \left[\frac{1}{-0.03} \cdot e^{-0.03t}\right]_0^{\infty}$$

$$= -\frac{12}{0.03} \cdot (0 - 1) = \frac{12}{0.03} = \frac{12}{3/100} = \frac{1200}{3} = \underline{\underline{400}}$$

b) <u>Nåverdi av salgssum:</u>

$$\frac{S}{e^{0.10 \cdot 7}}$$



S = salgs-sum

<u>Nåverdi framtidige leieinnt.:</u>

$$\int_7^{\infty} 12 \cdot e^{0.07t} \cdot e^{-0.10t}\,dt$$

$$= 12 \left[-\frac{1}{0.03} e^{-0.03t}\right]_7^{\infty}$$

$$= -\frac{12}{0.03}\left(0 - e^{-0.21}\right) = \underline{400 e^{-0.21}}$$

$$\frac{S}{e^{0.70}} \geq 400 e^{-0.21}$$ hvis $\underline{\underline{S \geq 400 e^{0.49}}}$

Pause: Starter 12.10

5. $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$

C: Nivåkurven til gjennom $(-1,2)$

$f(x,y) = 2$ siden $f(-1,2) = 2$

a) Stasjonære pkt: $f'_x = -3x^2 + 3 = 0$

$f'_x = f'_y = 0$ $f'_y = 2y = 0$

$\Rightarrow y = 0$, $x^2 = 1$

$x = \pm 1$

Stasjonære pkt: $(x,y) = (1,0), (-1,0)$

Klassifikasjon: Andrederivert-testen

$$H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$H(f)(1,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\det = -12 < 0 \Rightarrow$ $(1,0)$ sadelpkt

$H(f)(-1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\det = 12 > 0$, $\operatorname{tr} = 8 > 0$ $\Rightarrow$ $(-1,0)$ lokalt min

$\operatorname{tr} = A + C = 6 + 2$

b) Tangent til C i (-1, 2):

$y - y_0 = a(x - x_0)$ $\quad (x_0, y_0) = (-1, 2)$

$a = y'(-1,2) = -\dfrac{f'_x(-1,2)}{f'_y(-1,2)} = -\dfrac{0}{4} = \underline{0}$

$f'_x = -3x^2 + 3$

$f'_y = 2y$

Tangent:

$y - 2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = 2}}$

Andre skjæringspkt:

C: $\boxed{\begin{cases} f(x,y) = 2 \\ \text{og} \\ \text{tangent: } y = 2 \end{cases}}$

$f(x, 2) = 2$

$2^2 - x^3 + 3x = 2$

$-x^3 + 3x + 2 = 0$

$x^3 - 3x - 2 = 0$

Vet at $x = -1$ er en løsning

$x^3 - 3x - 2 : (x+1) = x^2 - x - 2$
$-(x^3 + x^2)$
$-x^2 - 3x - 2$
$-(-x^2 - x)$
$-2x - 2$
$-2x - 2$ / 0

$(x+1)(x^2 - x - 2) = 0$

$\underline{x = -1}$ eller $x^2 - x - 2 = 0$

$\underline{x = -1}, \underline{x = 2}$

Andre skjæringspkt:

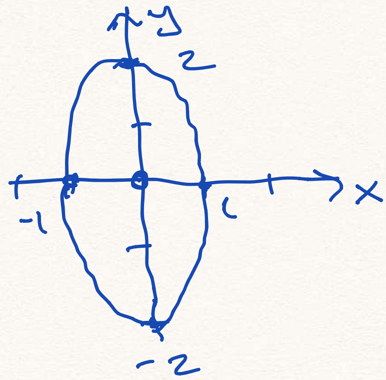
$(x, y) = \underline{\underline{(2, 2)}}$

c) $4x^2+y^2=4 \quad : 4$

$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Ellipse, senter (0,0), halvakser $a=1$, $b=2$



Begrenset: Ja

fordi $-1 \leq x \leq 1$
$-2 \leq y \leq 2$

for alle (x,y) på kurven

d) max $f=y^2-x^3+3x$ når $4x^2+y^2=4$

i) Ellipsen begrenset betyr at det fins et maks ved ekstremverdisetn.

ii) Kandidatpkt:

- vanlige: kandidatpkt → Lagrange
- degenerert bibetingelse: ingen
  (siden det er en ellipse, er det ingen tillatte pkt med degen. bibet.)

Lagrange: $\mathcal{L} = y^2 - x^3 + 3x - \lambda \cdot (4x^2 + y^2)$

Lagrange-betingelsene

$$\boxed{\begin{aligned} \text{FOC}\quad & \mathcal{L}'_x = -3x^2 + 3 - \lambda \cdot 8x = 0 \\ & \mathcal{L}'_y = 2y - \lambda \cdot 2y = 0 \\ \text{C}\quad & 4x^2 + y^2 = 4 \end{aligned}}$$

ii) $2y(1-\lambda) = 0$ $\quad$ $y = 0$ eller $\lambda = 1$

$y = 0$

iii) $4x^2 = 4$

$x^2 = 1$ $\quad$ $x = \pm 1$

i) $\cancel{-3} + \cancel{3} - \lambda \cdot 8x = 0$

$\lambda = 0$ siden $x = \pm 1$

$\Downarrow$

$(x, y; \lambda) = (1, 0; 0), (-1, 0; 0)$

$f = 2$ $\quad$ $f = -2$

$\lambda = 1$

i) $-3x^2 + 3 - 8x = 0$

$-3x^2 - 8x + 3 = 0$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(-3) \cdot 3}}{2 \cdot (-3)}$$

$$= \frac{8 \pm 10}{-6} = -3, \ 1/3$$

iii) $\cancel{x = -3}$: $4 \cdot 9 + y^2 = 4$

$y^2 = -32$

umulig

$x = 1/3$: $4 \cdot 1/9 + y^2 = 4$

$y^2 = 4 - 4/9 = 32/9$

$y = \pm \sqrt{32/9}$

$(x, y; \lambda) = (1/3, \pm\sqrt{32/9}; 1)$

$f = 32/9 - 1/27 + 1 = 122/27$

Konklusjon: $f_{max} = f\left(1/3, \pm\sqrt{32/9}\right) = \underline{\underline{122/27}}$

med $\lambda = 1$

(fordi ellipsen er begrenset og det finns et maks blant ordinære kand.dat.pkt)

Degenerert bibet:

$\underbrace{4x^2+y^2}_{g(x,y)}=\underbrace{4}_{a}$:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} g'_x &= 8x = 0 \\ g'_y &= 2y = 0 \\ 4x^2&+y^2=4 \end{aligned}\right\}} \quad (x,y) = (0,0)$$

siden $(0,0)$ ikke passer i bibet., er det ingen tillatte pkt med degenerert bibet.

6. min $f(x,y) = x$ når $y^2 - x^3 + 3x = 2$

Lagrange: $\mathcal{L} = x - \lambda(y^2 - x^3 + 3x)$

$$\text{FOC}\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 1 - \lambda\cdot(-3x^2+3) = 0 \\ \mathcal{L}'_y = -\lambda\cdot 2y = 0 \end{cases}$$

$$C\ \{\ y^2 - x^3 + 3x = 2$$

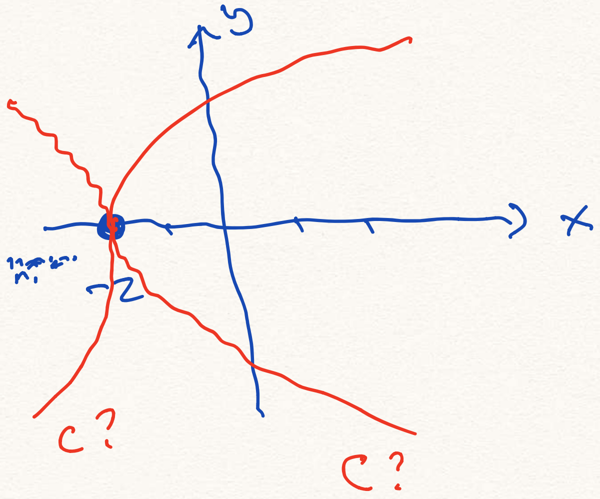
ii) $-2\lambda y = 0$ $\quad \underline{\lambda = 0}$ eller $\underline{y=0}$

$\lambda = 0$	$y = 0$
i) $1 = 0$ umulig	iii) $-x^3 + 3x = 2$
	$x^3 - 3x + 2 = 0$ ← $\underline{x=1}$: ok.
	$(x-1)(x^2+x-2) = 0$ ← polyn.div.
	$\underline{x=1}$ eller $x^2+x-2=0$
	$x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = 1, -2$
	$\underline{x=1}$, $\underline{x=-2}$
	i) $\underline{x=1}$: $1 - \lambda\cdot 0 = 0$ umulig.
	$\underline{x=-2}$: $1 - \lambda\cdot(-9) = 0$ $\quad \lambda = -1/9$
	$(x,y;\lambda) = (-2,0;-1/9)$

min $f = x$ när $y^2 - x^3 + 3x = 2 \leftarrow C$

Kandidatpkt: $(x, y; \lambda) = (-2, 0; -1/9)$

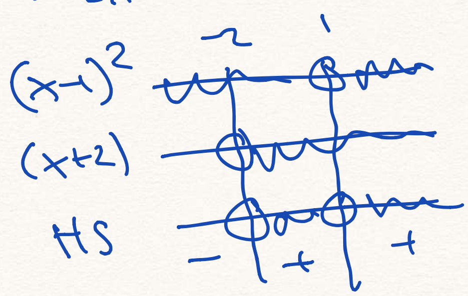
$f = -2$



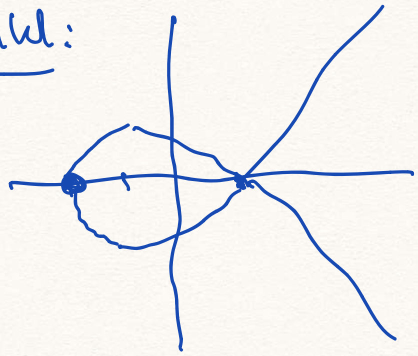
C: $y^2 - x^3 + 3x = 2$

$y^2 = x^3 - 3x + 2$

$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$



Konkl:



$f_{min} = -2$ i $(-2, 0)$

$x < -2$:

$x^3 - 3x + 2 < 0$

$y^2 = k \quad k < 0$

omöjlig