Forelesning 31 MET1180

Plan:

① Lagranges metode

② Lagrange multiplikatorer

③ Flere optimeringsproblem

Repetisjon:

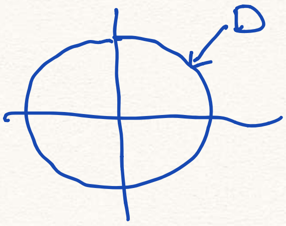
Lagrange-problemer: optimeringsproblem med likning som bibetingelser

$$\max/\min \quad \underbrace{f(x,y)}_{\text{objektiv-funksjon}} \quad \text{når} \quad \underbrace{g(x,y)=a}_{\text{bibetingelsen}}$$

$\boxed{D:\ g(x,y)=a}$ er mengden av tillatte pkt.

Eks: maks/min $f(x,y)=x+3y$ når $x^2+y^2=10$

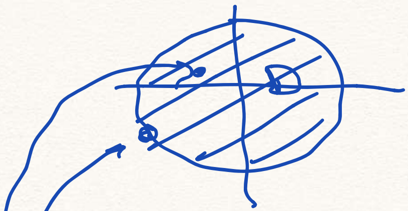
$D: g(x,y) = a$



D er lukket (=)
Kun randpkt
(ingen indre pkt.)

Lagrange-problem

$D: g(x,y) \leq a$



D er lukket ($\leq$)
Både randpkt og
indre pkt

Ikke Lagrange-
problem

Metode for å løse Lagrange-problem:

- D er begrenset: Ekstremverdisetn.: Det fins maks/min blant kandidat-punktene.
- D er ikke begrenset: Det kan være maks/min, men det er ikke sikkert. Hvis det fins maks/min, så er det blant kandidatpkt.

Metode for å finne kandidatpkt:

$\begin{array}{l} \text{maks} / \text{min} \quad f(x,y) \\ \text{når} \quad g(x,y) = a \end{array}$

i) Ordinære kandidatpkt:

$$L = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$$

$$\text{Lagrange-bet.} \begin{cases} \underline{\text{FOC}}: & \begin{cases} L'_x = f'_x - \lambda \cdot g'_x = 0 \\ L'_y = f'_y - \lambda \cdot g'_y = 0 \end{cases} \\ \underline{C}: & \} \quad g(x,y) = a \end{cases}$$

Løsninger av likn.-systemet FOC + C

$\Downarrow$

Ordinære kandidatpkt.

ii) Eksepsjonelle kandidatpkt:

degenerert bibetingelse

$$g(x,y) = a$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla g = 0 \begin{cases} g'_x = 0 \\ g'_y = 0 \end{cases} \\ \qquad g(x,y) = a \end{array}\right\}$$

Løsninger av $\boxed{\nabla g = 0}$ + C

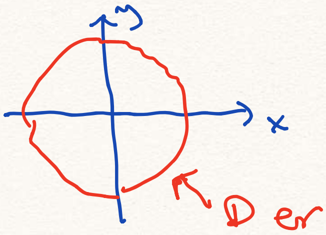
$\Downarrow$

eksepsjonelle kandidat pkt

Husk: Det er lurt å regne ut $f(x,y)$ for hvert kandidatpkt.

Eks: maks/min $f(x,y) = x+3y$ når $x^2+y^2=10$

D: $x^2+y^2=10$



D er en sirkel (begrenset)

Ekstremverdisetn.

$\Longrightarrow$ det fins maks/min.

Kandidat pkt:

i) $L = x+3y - \lambda\cdot(x^2+y^2)$

$$\text{FOC}\begin{cases} L'_x = 1 - \lambda\cdot 2x = 0 \Longrightarrow & x = \dfrac{1}{2\lambda} \quad (\lambda \neq 0) \\ L'_y = 3 - \lambda\cdot 2y = 0 & y = \dfrac{3}{2\lambda} \quad " \end{cases}$$

C $\qquad x^2+y^2 = 10$

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 10$$

$$\frac{1+9}{(2\lambda)^2} = 10 \quad | \cdot(2\lambda)^2 : 10$$

$$1 = (2\lambda)^2$$

$$2\lambda = \pm 1$$

$$\boxed{\lambda = \pm 1/2}$$

$\underline{\lambda = 1/2}$: $(x,y;\lambda) = \underline{(1,3;\tfrac{1}{2})}$ $f=10$

$\underline{\lambda = -1/2}$: $(x,y;\lambda) = \underline{(-1,-3;-1/2)}$

$f=-10$

Ordinære kandidatpkt:

$$(x,y;\lambda) = \underline{(1,3;\tfrac{1}{2})}\ ,\ \underline{(-1,-3;-\tfrac{1}{2})}$$

$f=10$ $\qquad$ $f=-10$

ii) Degenerert bibetingelse:

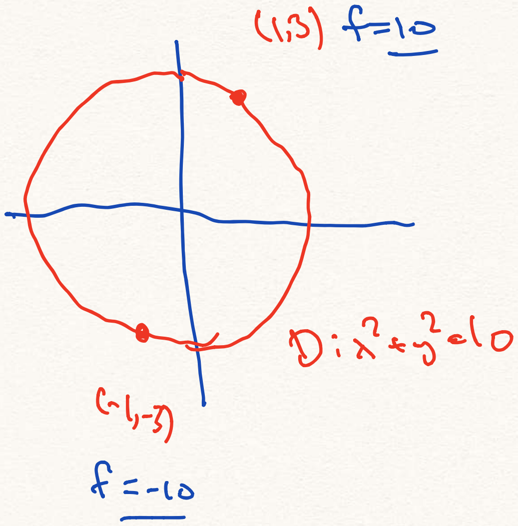
$\underline{x^2+y^2=10}$:

$$g'_x = 2x = 0 \Rightarrow x=0$$
$$g'_y = 2y = 0 \Rightarrow y=0$$
$$x^2+y^2=10 \qquad 0^2+0^2 \neq 10$$

ingen løsn.

$\Downarrow$

ingen eksepsj. kandidatpkt



Konklusjon:

$f_{max} = \underline{\underline{10}}$ i (1,3)

$f_{min} = \underline{\underline{-10}}$ i (-1,-3)

(fordi D er lukket og begrenset)

① Lagrange-problemer

Hvorfor setter vi opp likningene / FOC:

$$\left\{ \begin{array}{l} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \end{array} \right\} \qquad \left\{ \begin{array}{l} f'_x - \lambda \cdot g'_x = 0 \\ f'_y - \lambda \cdot g'_y = 0 \end{array} \right|$$

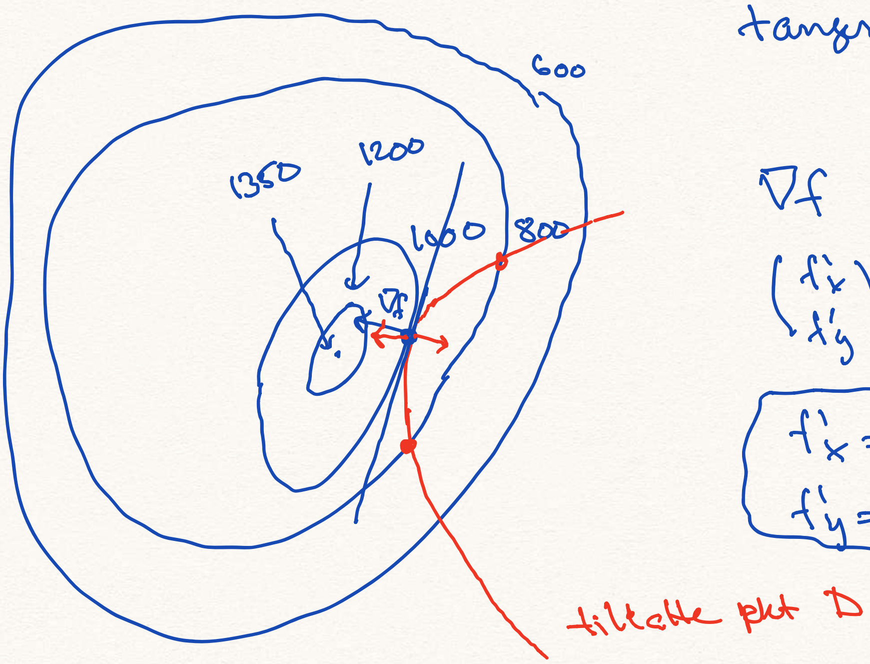
tangenten er lik

$$\Updownarrow$$

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$$

$$\begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} g'_x \\ g'_y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f'_x = \lambda \cdot g'_x \\ f'_y = \lambda \cdot g'_y \end{array}}$$



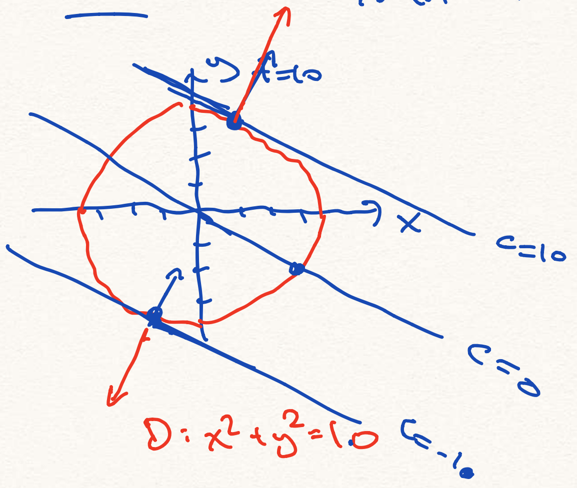
nivåkurver for f

max f(x,y) når (x,y) ligger på D

oppnås når tangenten til nivåkurven f(x,y)=c

= tangenten til D: g(x,y)=a

Eks: max/min $f = x+3y$ når $x^2+y^2=10$



$f_{max} = 10$: $(1,3)$

$f_{min} = -10$ i $(-1,-3)$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

Nivåkurver for f: $f(x,y) = c$

$x+3y = c$

f=10: $x+3y=10$

$3y = 10-x$

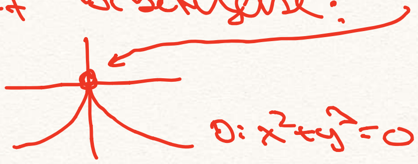
$y = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}x$

f=-10: $x+3y=-10$

$3y = -10-x$

$y = -\frac{10}{3} - \frac{1}{3}x$

Merk: Degenerert bibetingelse: $\nabla g = 0$

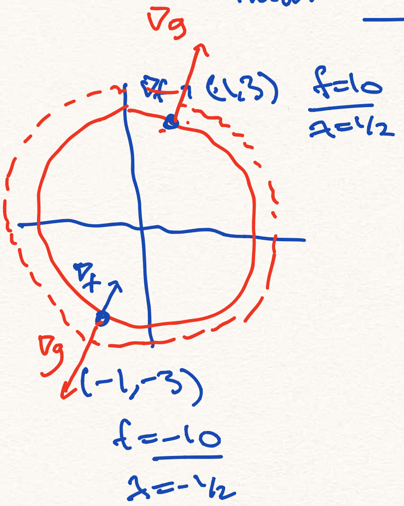


② Tolkning av Lagrangemultiplikatoren λ

Eks: max/min $f(x,y) = x+3y$ når $\underset{g(x,y)}{x^2+y^2} = \underline{10}$

$f_{max} = \underline{10}$ i $(x,y) = (1,3)$ med $\underline{\lambda = 1/2}$

$f_{min} = \underline{-10}$ i " $(-1,-3)$ " $\underline{\lambda = -1/2}$



Parametrisert Lagrange problem:

max/min $f(x,y) = x+3y$ når $x^2+y^2 = a$

$\underline{a=10}$: $f_{max} = 10$ $(x,y) = (1,3)$ $\underline{\lambda = 1/2}$

$f_{min} = -10$ " $(-1,-3)$ $\lambda = -1/2$

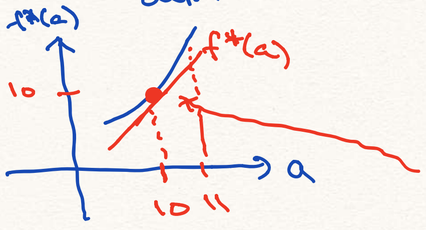
$\underline{a=11}$: ??? $f_{max} = ?\ \boxed{>10}$

$f_{min} = ?\ \boxed{<-10}$

Optimalverdifunksjon: $\boxed{\max}$

$f^*(a) \underset{\text{defn.}}{=} f_{max}$ når vi ser på problemet

$$\boxed{\max \underset{\substack{\| \\ x+3y}}{f(x,y)} \text{ når } x^2+y^2=a}$$



$\boxed{\lambda : \text{Stigningstallet til maks verdifn. } f^*(a).}$

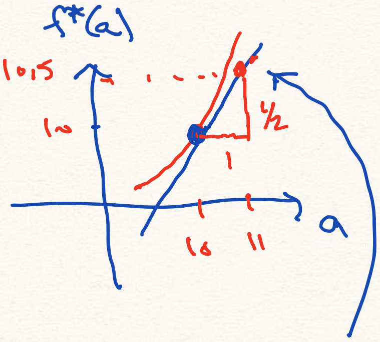
Tolking av λ:

max $f(x,y)$ når $g(x,y) = \underline{\underline{a}}$

$f^*(a) = f_{max}$ i problemet ovenfor

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lambda = \frac{df^*(a)}{da}}$$



Hvis a øker med 1 enhet, vil maksimumsverdien øke med tilnærmet lik λ.

stigningstallet $= \dfrac{df^*(a)}{da} = \underline{\underline{\lambda}}$

Eks: max $f = x+3y$ når $x^2+y^2=10$ $\quad$ $\boxed{a=10}$

har $f_{max} = \underline{10}$ i $(x,y;\lambda) = \underline{(1,3;1/2)}$

$$\Downarrow$$

$$f^*(\overset{a=10}{10}) = \overset{f_{max}}{10}$$

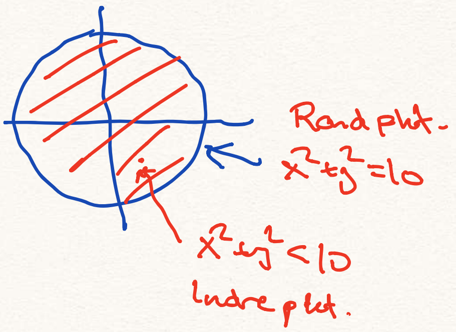
$$f^*(11) \simeq \underset{f^*(10)}{10} + \underset{\substack{\Delta a = 11-10 \\ =1}}{1} \cdot \underset{\frac{df^*(a)}{da} = \lambda = \frac{1}{2}}{1/2}$$

$\underline{f_{max}}$: max $f = x+3y$
når $x^2+y^2=11$

Eks: max $f(x,y) = x+3y$ når $x^2+y^2 \leq 10$

Kuhn-Tucker problem

D: $x^2+y^2 \leq 10$



D lukket $(\leq)$ $\Rightarrow$ det fins max/min
og begrenset

Kandidat pkt: / indre pkt som er stasjonære
\ randpkt

a) Indre pkt; stasjonære $\begin{cases} f'_x = 1 = 0 \\ f'_y = 3 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ ingen kandidater

b) Randpkt; $x^2+y^2=10$ $\xrightarrow{\text{Lagrange}}$ $\begin{cases} (x,y;\lambda) = \underline{(1,3;1/2)} \quad f=10 \\ \underline{(-1,-3;-1/2)} \quad f=-10 \end{cases}$

$\Downarrow$

$f_{max} = \underline{\underline{10}}$ i $\underline{(1,3)}$