Forelesning 30

MET1180

Plan:

1. Lagranges metode
2. Degenererte bibetingelser
3. Globale maksimum og minimum

Repetisjon:

Ekstremverdisetningen

Hvis f er kontinuerlig på en kompakt (lukket og begrenset) delmengde D, så har f maks. og min. i D.

f: objektivfn. i problemet

D: mengden av alle tillatte pkt (x,y) – dvs alle pkt som oppfyller bibetingelsene

Husk:

- lukket

  hvis bibetingelsene er gitt med $=$ $\leq$ $\geq$

- begrenset hvis alle pkt i D er inneholdt i et rektangel

Viktige kurver:

i) Rett linje: $ax+by=c$ $\qquad 2x+3y=12$

ii) Sirkel: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ $\qquad x^2+y^2=4$

iii) Ellipse: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ $\qquad 9x^2+4y^2=36$

iv) Parabel: $y=a(x-x_0)^2+b$ $\qquad y=2x^2-3$

v) Hyperbel: $y-b=\dfrac{c}{x-a}$ $\qquad xy=6$

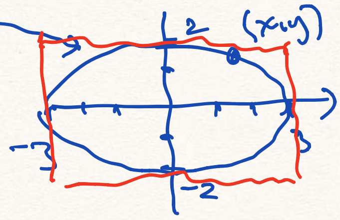
Begrenset:

ellipse

Eks: $4x^2+9y^2=36 \quad |:36$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$a=3 \qquad b=2$



$-3 \le x \le 3$

$-2 \le y \le 2$

begrenset

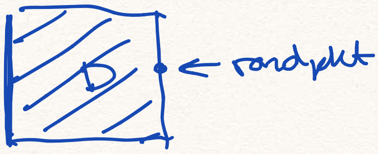
Husk:
Hvis D er lukket og begrenset, så har vi maks/min

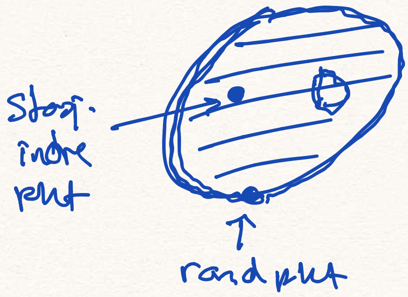
Obs: maks/min er et av kondidatpkt

Kandidatpkt: max/min-problem med bibetingelser

i) Indre pkt i D som er et stasjonært pkt for f (eller der f'_x / f'_y ikke eks.)

ii) Randpkt for D





Metoder:

A) Løse bibetingelsen $g(x,y) = a$ for x eller y, og sette inn i $f(x,y)$

$\Longrightarrow$ max/min-problem i én variabel uten bibetingelser

enkle tilfeller med betn.

B) Finn kandidatpkt av type i) og ii) ovenfor, ved å løpe gjennom alle randpkt

tilfeller hvor randen består av rette linjer

c) Lagranges metode

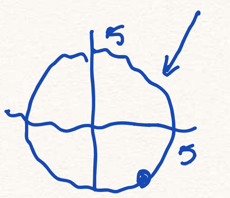
① Lagranges metode

Defn: Lagrangeproblem = max/min-problem der bibetingelser er likninger

$$\boxed{\max/\min\ f(x,y) \text{ når } g(x,y)=a}$$

Eks: max/min $f(x,y) = 4x-3y$ når $x^2+y^2=25$

I dette tilfellet er D kompakt (lukket, begrenset), derfor har vi maks og min.



D = sirkel (kun randpkt)

Lagranges metode:

max/min $f(x,y)$ når $g(x,y) = a$.

$g(x,y) - a = 0$

Lagrangefunksjonen:

$$L(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$$

λ er Lagrangemultiplikatoren
(lambda) (hjelpevariabel)

FOC: (førsteordens-betingelser)

$$\begin{cases} L'_x = f'_x - \lambda \cdot g'_x = 0 \\ L'_y = f'_y - \lambda \cdot g'_y = 0 \end{cases}$$

C: $g(x,y) = a$

tre ligninger i tre ukjente
løsninger = kandidatpkt.

Valgfritt:

$$L = f(x,y) - \lambda\left(g(x,y) - a\right)$$

$$L'_\lambda = -\left(g(x,y) - a\right) = 0$$

Eks: $\max/\min f(x,y) = 4x - 3y$ når $\underbrace{x^2+y^2}_{g(x,y)} = \underbrace{25}_{a}$

Finner kandidatpkt ved Lagranges metode:

$$L(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$$
$$= 4x - 3y - \lambda \cdot (x^2+y^2)$$

FOC $\left\{ \begin{array}{l} L'_x = \\ L'_y = \end{array} \right.$ C |

$$\boxed{\begin{array}{l} 4 - \lambda \cdot 2x = 0 \\ -3 - \lambda \cdot 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array}}$$

3 likn.
3 ukjente
}
må løse
disse for
å finne
kandidatpkt.

(1) $2\lambda x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2\lambda}$

(2) $2\lambda y = -3 \Rightarrow y = \frac{-3}{2\lambda}$

$\lambda = 0?$
(1) $4 - 0 = 0$
umulig
$\lambda \neq 0$ ok.

(3) $\left(\frac{4}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2\lambda}\right)^2 = 25$

$$\frac{16}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 25$$

$$\frac{25}{4\lambda^2} = 25 \quad | \cdot 4\lambda^2 : 25$$

$$1 = 4\lambda^2 \qquad \lambda^2 = 1/4$$

$$\lambda = \pm 1/2$$

$$x = \frac{4}{2\lambda} \qquad y = \frac{-3}{2\lambda}$$

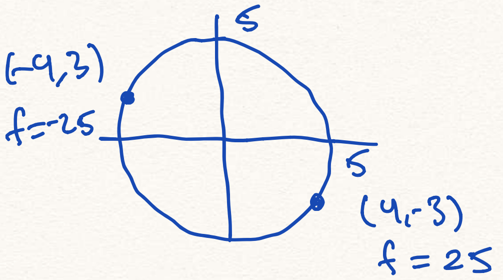
$\underline{\lambda = 1/2}$: $\quad x = \frac{4}{1} = 4 \quad y = \frac{-3}{1} \Rightarrow \underline{(4,-3;\ 1/2)}$

$\lambda = \underline{-1/2}$: $\quad x = \frac{4}{-1} = -4 \quad y = \frac{-3}{-1} = 3 \Rightarrow (-4,3;-1/2)$

$\underline{\text{Kandidatpkt}}$: $(x,y;\lambda) = (4,-3;1/2),\ (-4,3;-1/2)$

$f = \underline{25}$ $\qquad f = \underline{-25}$

maks? $\qquad$ min?



Løsninger av $\boxed{\text{FOC+C}}$ gir $\underline{\text{ordinære kandidatpkt.}}$

Lagrange-betingelsene

Ingen flere ordinære kandidat pkt. ✓

$\Rightarrow$ $f_{max} = 25$ i $(4,-3)$

$\quad f_{min} = -25$ i $(-4,3)$

(ekstremverdisetn. ⇒ det fins maks/min.)

Resultat:

Hvis (x^*, y^*) er et maks. eller min. i et Lagrangeproblem, så gjelder en av følgende:

i) Det fins λ slik at $(x^*, y^*; \lambda)$ oppfyller FOC + C (Lagrangebetingelse)

ii) Det er et tillatt pkt med **degenerert bibetingelse**, dvs (x^*, y^*) oppfyller

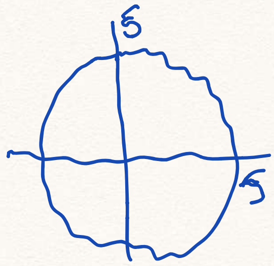
$$\boxed{\begin{aligned} g'_x &= 0 \\ g'_y &= 0 \\ g(x,y) &= a \end{aligned}}$$

Ordinære kandidatpkt: i) $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ g(x,y) = a \end{cases}$

Unntakspkt: ii) $\begin{cases} g'_x = 0 \\ g'_y = 0 \\ g(x,y) = a \end{cases}$

② Degenerert bibetingelse : Unntakspkt

Eks: $g(x,y) = a$ $\boxed{x^2 + y^2 = 25}$



Merk: unntakspkt har kun med bibetingelsen $g(x,y) = a$ å gjøre

$g(x,y) = x^2 + y^2$:

$$\begin{cases} g'_x = 2x = 0 \\ g'_y = 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$x = 0$

$y = 0$

$0^2 + 0^2 = 25$
umulig

⇓

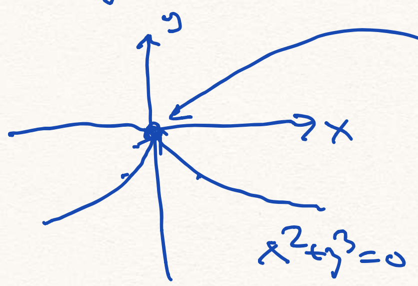
Ingen unntakspkt for sirkelen

Eks: maks $f(x,y)=y$ når $x^2+y^3=0$

Bibetingelse:

$-x^2=y^3$

$\Rightarrow y=-\sqrt[3]{x^2}$



$$\mathcal{L}=y-\lambda(x^2+y^3)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = -\lambda\cdot 2x=0 \\ \mathcal{L}'_y = 1-\lambda\cdot 3y^2=0 \\ x^2+y^3=0 \end{cases}$$

(1) $\cancel{x=0}$ eller $\cancel{\lambda=0}$

$x=0$: (3) $y=0$
(2) $1=0$ umulig

$\lambda=0$: (2) $1=0$ umulig

Ingen ordinære kandidatpkt.

Degenerert bibetingelse:

$g=x^2+y^3$

$$\begin{cases} g'_x = 2x=0 \\ g'_y = 3y^2=0 \\ x^2+y^3=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ 0=0 \checkmark \end{matrix}$$

$(0,0)$ er tillatt pkt med degenerert bibetingelse

$\nabla g=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ degenert bibet.

$\Downarrow$

$(0,0)$ kan være maks.

I dette tilfellet:

$f_{max}=0$ i $(0,0)$

Vanlige problemer: Lagrange problemer

A) Glemmer å teste på randpunkt.
(tillatte pkt med degenerert bibet.)

B) Glemmer at det ikke er sikkert
at det fins maks/min.
(glemmer ekstremverdisetningen,
eller at D ikke er begrenset)

③ Globale maks/min

Enkelt tilfelle: D er kompakt
⟹ ekstremverdisetn.
det fins maks/min

Vanskeligere: D er ikke begrenset

kan finnes max/min,
men det er ikke
sikkert

Eks: max/min $f(x,y) = x^2+y^2$ når $xy=1$

$L = x^2+y^2-\lambda(xy)$

$$\text{FOC}\begin{cases} L'_x = 2x-\lambda\cdot y = 0 \\ L'_y = 2y-\lambda\cdot x = 0 \end{cases}$$
$$C\{\; xy = 1$$

(1) $2x = \lambda y \Rightarrow x = \frac{\lambda y}{2}$

(2) $2y-\lambda\cdot\left(\frac{\lambda y}{2}\right) = 0 \;|\cdot 2$

$4y-\lambda^2 y = 0$

$y(4-\lambda^2) = 0$

divisjon med $y \Rightarrow$ vi mister løsn. med $y=0$

$\cancel{y=0}$ eller $\lambda^2=4$

$x=0$

$0\cdot 0 = 1$

umulig

$\lambda = 2$ eller $\cancel{\lambda=-2}$

$x=y$ (1)

$y\cdot y = 1$ (3)

$y^2=1 \quad y=\pm 1$

$(1,1;2)$ $f=2$

$(-1,-1;2)$ $f=2$

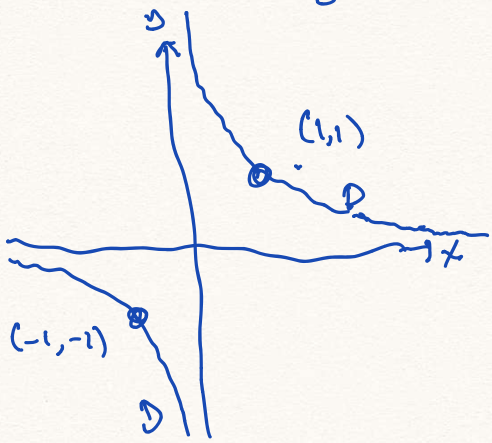
(1) $x=-y$

(3) $(-y)\cdot y = 1$

$-y^2=1$

$y^2=-1$

umulig



$xy=1 \Rightarrow y = 1/x$

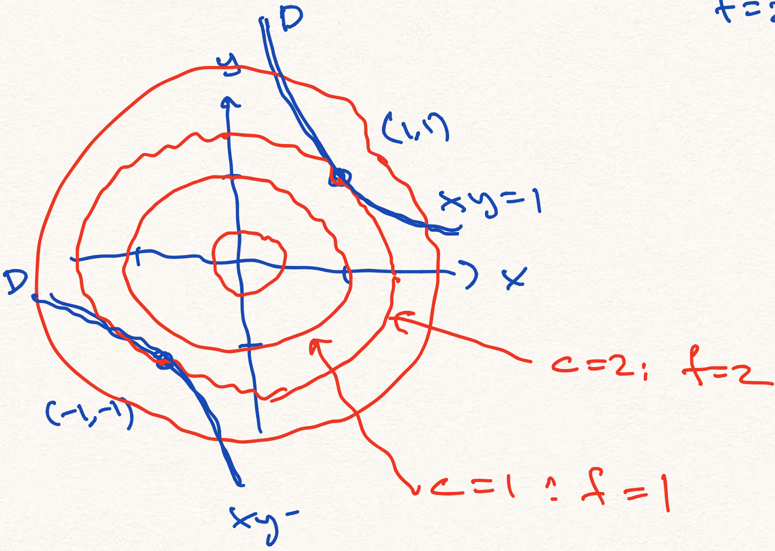
D: ikke begrenset

Ordinære kand. pkt: $(1,1;2)$, $(-1,-1;2)$

Degenerert bibetingelse: $g(x,y) = xy = 1$

$$\left.\begin{aligned} g'_x &= y = 0 \\ g'_y &= x = 0 \\ xy &= 1 \end{aligned}\right\}$$ ingen muntalspkt

Kandidat pkt: $(x, y; \lambda) = \underset{f=2}{\underline{(1,1;2)}}, \underset{f=2}{\underline{(-1,-1;2)}}$



Nivåkurver: for f

$f(x,y) = x^2 + y^2 = c$

Sirkel, senter i (0,0)

$r = \sqrt{c}$

$f_{min} = \underline{\underline{2}}$ i $(1,1), (-1,-1)$

sirkler med f-verdi mindre enn 2 (r mindre enn $\sqrt{2}$)

ingen maks