MET 1180, 3. forelesning, 26. aug. 2019, Runar Ile

Plan: 1. Repetisjon
2. Kontantstrømmer kap 1.4
3. Rekker kap 1.5
4. Annuiteter kap 1.6

---

1. Repetisjon

$$\text{Relativ endring} := \frac{\text{ny verdi} - \text{gammel verdi}}{\text{gammel verdi}}$$

$$\text{Vekstfaktor} := 1 + \text{relativ endring}$$

Eks: Verdien av Kåres leilighet vokser med 10% det første året og faller med 30% det andre året. Finn den relative verdiendringen for disse to årene.

Løsning: Vi setter $r_1 = 0{,}1$ og $r_2 = -0{,}3$

Vekstfaktor for år 1: $1 + r_1 = 1{,}1$

Vekstfaktor for år 2: $1 + r_2 = 0{,}7$

Vekstfaktor for de to årene samlet er

da $(1+r_1)(1+r_2) = 1{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}77$

Den relative verdiendringen er $0{,}77 - 1 = -0{,}23$

$= \underline{\underline{-23\%}}$

Mønster: Relative verdiendringer $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$

gir $\underbrace{(1+r_1)(1+r_2)\cdot(1+r_3)\cdot\ldots\cdot(1+r_n)}_{\text{samlet vekstfaktor}} - 1$ (samlet relativ endring)

Renteregning: Innskudd (B_0) $= 50\,000$

rente (r) $= 4\,\%$. Etter 5 år har innskuddet vokst til

$$50\,000 \cdot (1 + 4\%)^5 = 50\,000 \cdot 1{,}04^5 = \underline{\underline{60\,832{,}65}}$$

Kalk: 50000 $\boxed{\times}$ 1,04 $\boxed{y^x}$ 5 $\boxed{=}$

Rentebegreper:

Kapitalisering – når renten legges til balansen

Rentetermin: Perioden mellom to kapitaliseringer

Terminrente: Renten pr. termin

Eks: Innskudd: 50 000, nominell rente: 4 %

Månedlig kapitalisering. Etter 5 år har innskuddet vokst til

$$50000 \cdot \left(1 + \frac{4\%}{12}\right)^{12 \cdot 5} = 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{1}{300}\right)^{60}$$

$$= \underline{\underline{61\,049{,}83}}$$

Effektiv rente = den årlige renten som gir det samme som terminrenten

I eks. $1 + r_{eff} = \left(1 + \frac{4\%}{12}\right)^{12} = 1{,}040742$

så $r_{eff} = 4{,}0742\,\%$

Potensregning: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(a \geq 0)$

Eks: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ og $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ osv.

Oppg Etter 5 år har innskuddet på 50 000 vokst til 60 000. Bestem den effektive renten.

Løsning: Den 5-årige vekstfaktoren er

$$1 + \frac{60\,000 - 50\,000}{50\,000} = 1{,}2$$

Da er den årlige vekstfaktoren $\sqrt[5]{1{,}2} = 1{,}2^{\frac{1}{5}}$

$= 1{,}2^{0{,}2} = 1{,}03714$. Så $r_{eff} = \underline{\underline{3{,}714\,\%}}$

Alternativ løsning: $50000\,(1 + r_{eff})^5 = 60\,000$

$$(1 + r_{eff})^5 = \frac{60\,000}{50\,000} = 1{,}2$$

$$1 + r_{eff} = \sqrt[5]{1{,}2}$$

$$r_{eff} = \sqrt[5]{1{,}2} - 1$$

$$= 3{,}714\,\%$$

Nåverdi av et beløp (K) om n år (terminer) med en gitt rente r

= det du må sette i banken i dag (K_0) for å få K om n år hvis renten er r.

Fordi $K = K_0 \cdot (1+r)^n$ så er nåverdien

$$K_0 = \frac{K}{(1+r)^n}$$

<u>Eks:</u> 50000 (K) om 3 år med 4% rente har nåverdi

$$K_0 = \frac{50000}{1{,}04^3} = \underline{\underline{44\,449{,}82}}$$

Altså: Hvis du setter 44 449,82 på konto i dag med 4% rente vil det være 50 000 på kontoen om 3 år.

---

2. Kontantstrømmer

<u>Eks:</u> Du investerer 20 mill i dag og får utbetalt 6 mill om 3 år, 7 mill om 4 år og 8 mill om 5 år.

Nåverdien av kontantstrømmen

$$\begin{array}{cccc} 0 \text{ år} & 3 \text{ år} & 4 \text{ år} & 5 \text{ år} \\ (-20, & 6, & 7, & 8) \end{array}$$

med årlig rente 8% er gitt som

$$-20 + \frac{6}{1{,}08^3} + \frac{7}{1{,}08^4} + \frac{8}{1{,}08^5} = -4{,}65$$

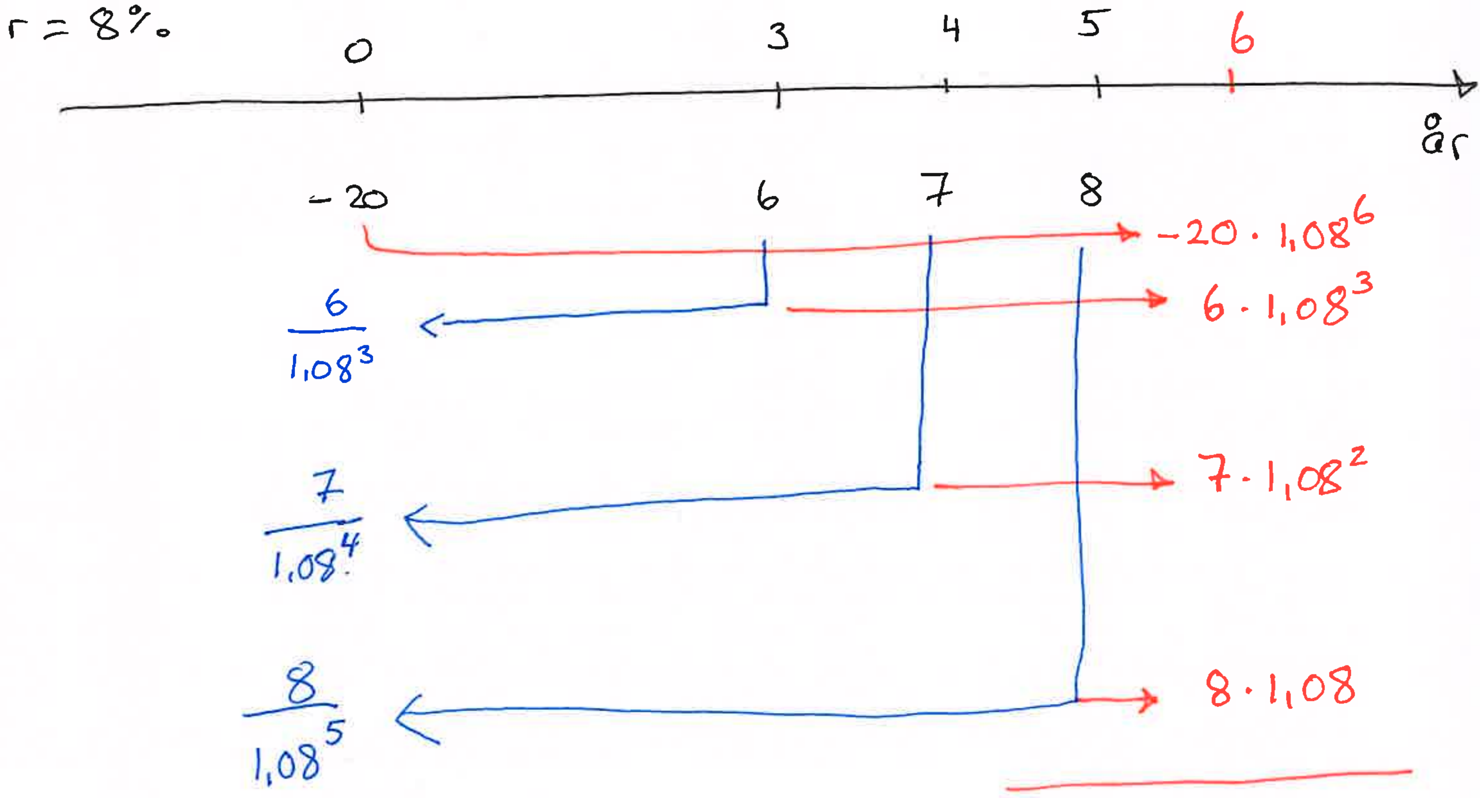
Er dette en god investering?

<u>Eks:</u> Finn nåverdien til denne kontantstrømmen hvis renten er 1,1197%.

<u>Løsn:</u> $-20 + \frac{6}{1{,}01197^3} + \frac{7}{1{,}01197^4} + \frac{8}{1{,}01197^5}$

$= 0{,}000$

Renten som gjør at nåverdien av kontant-strømmen er 0 kalles <u>internrenten</u>. I eks. er internrenten 1,197%



Summen er nåverdien av kontantstrømmen med 8% rente

Summen er fremtidsverdien om 6 år av kontantstrømmen med 8% rente

$-4{,}65 \longrightarrow -4{,}65 \cdot 1{,}08^6$

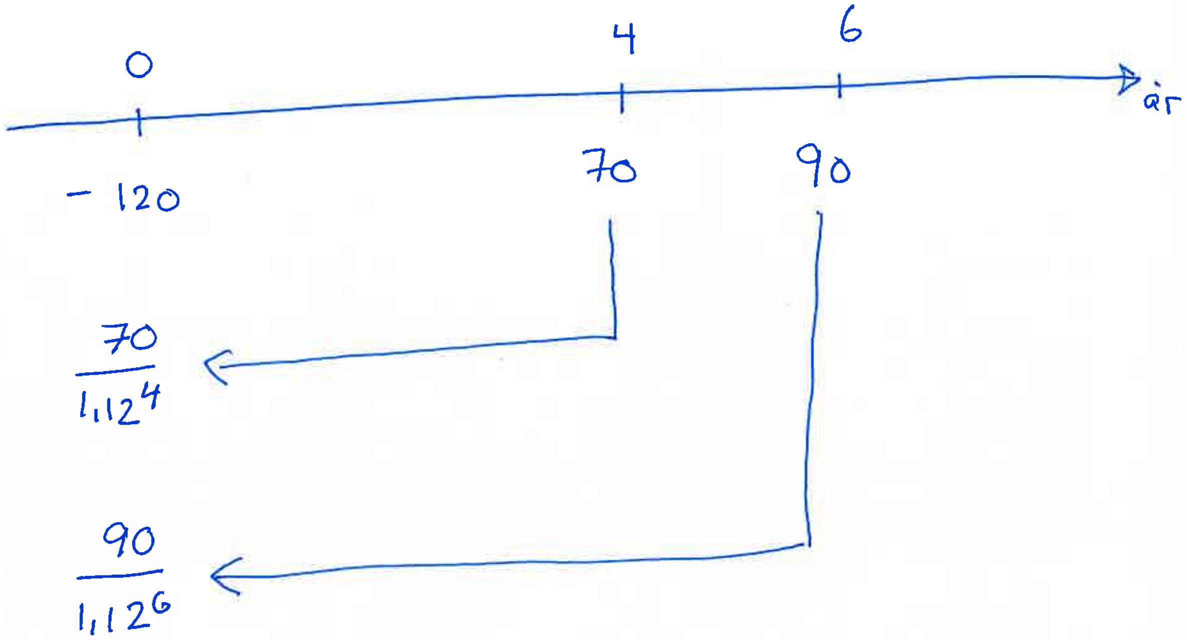
Oppg En investering på 120 mill skal gi utbetalinger på 70 mill om 4 år og 90 mill om 6 år. Anta renten er 12 %.

a) Finn nåverdien til kontantstrømmen

b) Vurdér om dette er en god investering.

Løsning:

a)



Nåverdien = summen $= \underline{\underline{-29{,}92}} = -120 + \frac{70}{1{,}12^4} + \frac{90}{1{,}12^6}$

b) Man får ikke 12 % rente på denne investeringen

I denne oppg. er internrenten (tilnærmet) 5,81 %

fordi $-120 + \frac{70}{1{,}058^4} + \frac{90}{1{,}058^6} = 0{,}0$ (tilnærmet)

5,81 % kan tolkes som årlig avkastning på investeringen.

3. Rekker

– lange addisjonsstykker.

Eks: $1 + \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{9}}_{=\text{et ledd}} + \ldots + \frac{1}{100}$ er en rekke med 10 ledd.

Vi skriver $a_1 + a_2 + \underbrace{a_3}_{\text{tredje ledd}} + \ldots + \underbrace{a_{10}}_{\text{10-ende ledd}}$

I eks: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{9}$, $\ldots$, $a_{10} = \frac{1}{100}$

<u>Geometriske rekker</u> $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ der hvert ledd er k ganger det foregående:

$$a_2 = k \cdot a_1, \quad a_3 = k \cdot a_2 = k \cdot \overbrace{k \cdot a_1} = k^2 \cdot a_1, \quad a_4 = k \cdot a_3 = k \cdot \overbrace{k^2 \cdot a_1} = k^3 \cdot a_1 \quad \text{osv}$$

Vi kan finne et uttrykk for summen

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 + k \cdot a_1 + k^2 \cdot a_1 + \ldots + k^{n-1} \cdot a_1$$
$$= a_1 \underbrace{(1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1})}_{\frac{k^n - 1}{k-1}}$$

Oppg Beregn summen

$$5 + 5\cdot 1{,}003 + 5\cdot 1{,}003^2 + 5\cdot 1{,}003^3 + \ldots + 5\cdot 1{,}003^{60}$$

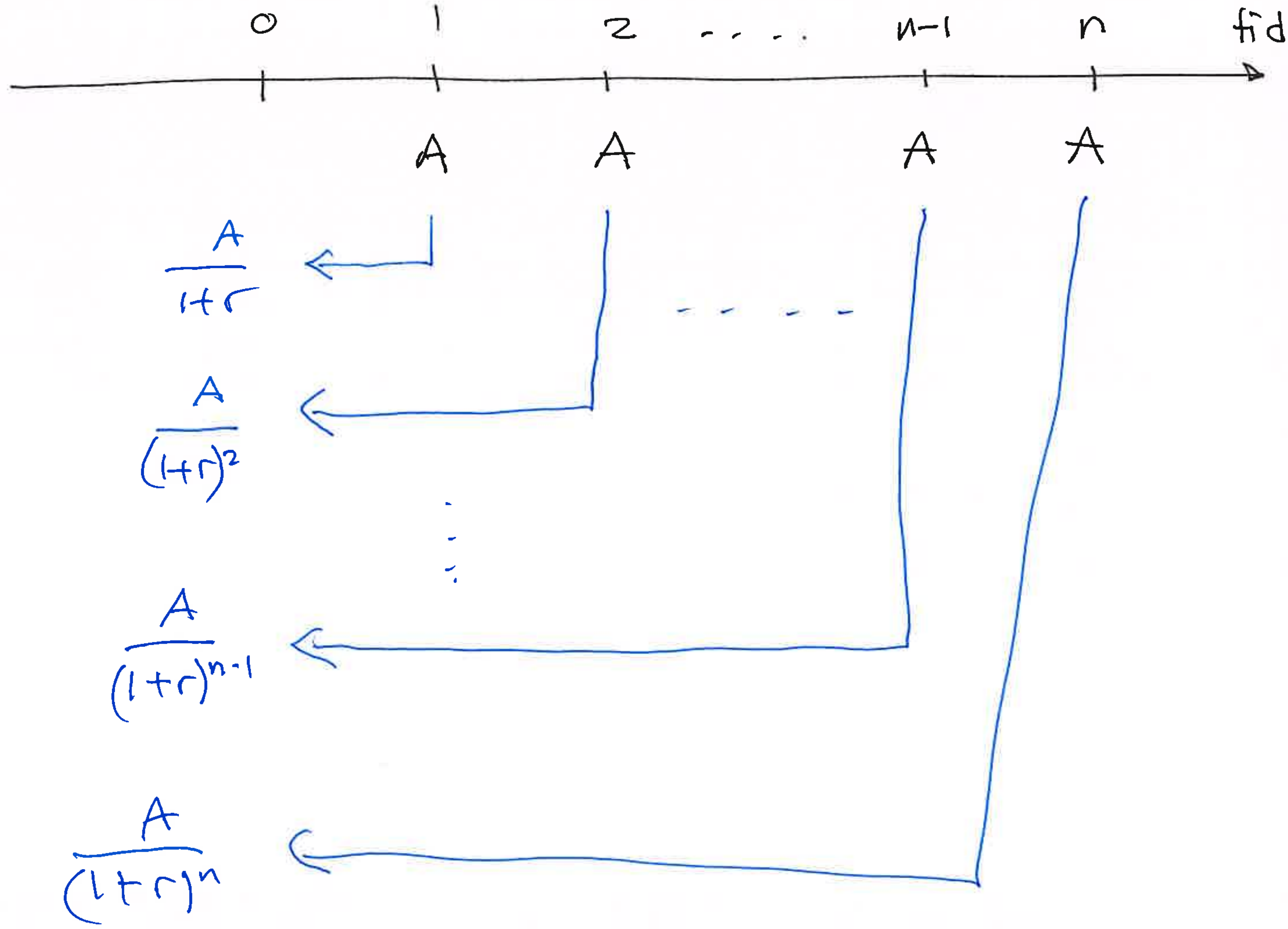
Løsning: Dette er en geometrisk rekke med

$n = 61$, $a_1 = 5$, $k = 1{,}003$

Da er summen $5\cdot\dfrac{1{,}003^{61}-1}{1{,}003-1} = 5\cdot\dfrac{1{,}003^{61}-1}{0{,}003}$

$= \underline{\underline{334{,}142}}$

4. Annuiter Jevne kontantstrømmer.



summen er en geom. rekke med $a_1 = \dfrac{A}{(1+r)^n}$, $k = 1+r$ og n ledd

(regner den baklengs)

Summen er da

$$\frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A}{(1+r)^n} = \frac{A}{(1+r)^n} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$= A \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}$$