Plan:

1. Optimering uten bibetingelser
2. Ekstremverdisetningen
3. Optimering med bibetingelser (når bibetingelsene er enkle)

Pensum: [E] 7.6

① Optimering uten bibetingelser

$$\boxed{\max / \min \ f(x,y)}$$

Metode:

① Finn alle kandidatpunkter:

i) Stasjonære pkt: $\underbrace{f'_x = f'_y = 0}_{\text{førsteordensbetingelsene}}$ } "vanlige" kandidatpunkt

ii) Andre kritiske pkt: f'_x eller f'_y er ikke defn.

iii) Randpunkt: et punkt i D_f som har punkt utenfor D_f "uendelig nær" = "på randen"

} unntak

Eks: $f(x,y) = 2x + 3y - 1$ $\quad \left.\begin{array}{l} f'_x = 2 \neq 0 \\ f'_y = 3 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ ingen maks/min

ingen kandidatpunkt

(2) Klassifisere kandidatpunkt:

Stasjonære pkt: (x^*, y^*) → Annenderivert-testen:

$AC - B^2$ → $|H(f)(x^*,y^*)| > 0$, $A > 0$: lok min (x^*,y^*)

$\uparrow$

$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

Kan se på A eller C eller A+C

$|H(f)(x^*,y^*)| > 0$, $A < 0$: lok. maks. (x^*,y^*)

$|H(f)(x^*,y^*)| < 0$: sadelpunkt (x^*,y^*)

* Lokal klassifikasjon: lok. maks ⇒ kan være globalt maks = maks

lok. min ⇒ kan være globalt min

sadelpunkt ⇒ hverken maks eller min

* Kan ikke bruke annenderivert-testen hvis:

i) stasjonært pkt med $|H(f)(x^*,y^*)| = 0$

ii) randpunkt (andre kritiske pkt og randpkt)

Må bruke andre metoder: Definisjon maks/min

(3) Undersøke om lokale maks/min er globale

– regne ut f i hvert av disse punktene ⇒ finn "beste" kandidat

– undersøk om f kan gå mot $\pm\infty$ eller om vi får større/mindre verdier enn "beste kandidat"

– vi kan gjøre kutt ($x=0$, $y=1$, ...) eller sette inn punkt

Oppsummering 28

5b) $f(x,y) = x^2y + xy^3 + xy^2$

max/min $f(x,y)$

① Kandidatpkt:

Stasjonære: $\left.\begin{array}{l} f'_x = 2xy + y^3 + y^2 = 0 \\ f'_y = x^2 + 3xy^2 + 2xy = 0 \end{array}\right\}$ førsteordens-betingelser

$\left.\begin{array}{l} y=0 \text{ eller } 2x+y^2+y=0 \\ \text{og} \\ x=0 \text{ eller } x+3y^2+2y=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y\cdot(2x+y^2+y)=0 \\ x\cdot(x+3y^2+2y)=0 \end{array}\right.$

$\Updownarrow$

i) $y=0,\ x=0 \Rightarrow \underline{(0,0)}$

ii) $y=0,\ x+3y^2+2y=0$ $\quad \underline{(0,0)}$

iii) $2x+y^2+y=0,\ x=0$ $\quad \left.\begin{array}{l} x=0,\ y^2+y=0 \\ y(y+1)=0 \\ y=0,\ y=-1 \end{array}\right\}$ $\underline{(0,0),\ (0,-1)}$

iv) $2x+y^2+y=0,\ x+3y^2+2y=0$

$\Downarrow$

$x = \underline{-3y^2-2y}$

$2(-3y^2-2y)+y^2+y=0$

$-6y^2-4y+y^2+y=0$

$\to$ $-5y^2-3y=0$

$-y(5y+3)=0$

$y=0,\ x=0$, $y=-3/5$

$x = -\frac{27}{25} + \frac{6\cdot 5}{5\cdot 5} = \underline{3/25}$

$\underline{(0,0)}$, $\underline{(3/25, -3/5)}$

Stasjonære pkt = kandidat pkt: $(0,0),\ (0,-1),\ (3/25, -3/5)$

② $H(f) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+3y^2+2y \\ 2x+3y^2+2y & 6xy+2x \end{pmatrix}$

$6xy+2x = 2x(3y+1) = \frac{6}{25}(-4/5)$

$2x+3y^2+2y = 6/25 + 27/25 - 6/5 = 3/25$

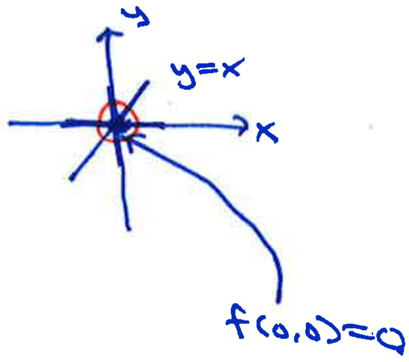
$(0,0)$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ det=0 ingen konklusjon

$(0,-1)$: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ det $= 0-1 = -1 < 0$ sadelpkt

$(3/25, -3/5)$: $\begin{pmatrix} -6/5 & 3/25 \\ 3/25 & -24/125 \end{pmatrix}$ det $= \frac{6\cdot 24}{5^4} - \frac{9}{5^4} = \frac{135}{625} > 0$, $A<0$ lokalt maks

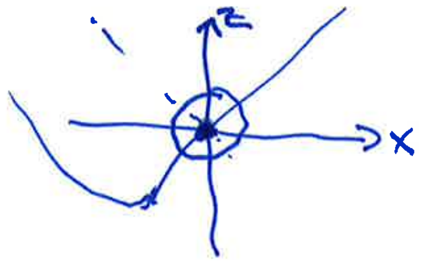
Undersøker (0,0) uten dette:

$f(x,y) = x^2y + xy^3 + xy^2 \quad f(0,0) = 0$



$x=0: f=0 \qquad y=0: f=0$

$y=x: \quad f = x^3 + x^4 + x^3 = x^4 + 2x^3$



$f' = 4x^3 + 6x^2$
$= 2x^2(2x+3)$

	$-3/2$		0	
$2x^2$			0	
$2x+3$	0			
f'	0		0	

$x>0: f>0$
$x<0: f<0$

Sadelpkt: (0,0)

Konklusjon: (0,0), (0,−1): sadelpkt
$(3/25, -3/5)$: lokalt maks

Globalt maks/min:
* ingen globale min
* ingen globale maks

($x^4 + 2x^3 \to \infty$ når $x \to \infty$)

5c) $f(x,y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$
$= \sqrt{u} = u^{1/2}, \quad u = 36 - 9x^2 - 4y^2$

$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (-18x) \qquad f'_y = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (-8y)$

$f'_x = \frac{-18x}{2\sqrt{u}} = 0 \qquad f'_y = \frac{-8y}{2\sqrt{u}} = 0 \qquad u(0,0) = 36 \neq 0$

$x = 0 \qquad y = 0 \qquad \Downarrow$

$\underline{\underline{(0,0)}}$

Klassifisering:

$f(0,0) = \sqrt{36} = \underline{6}$ globalt maks siden $f(x,y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2} \leq \sqrt{36} = 6$ for alle x,y

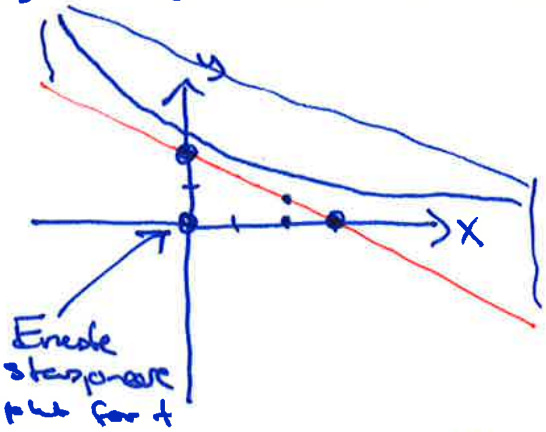
② Optimering med bibetingelser og ekstremverdisetninger

Optimering med bibetingelse:

$$\max/\min \underbrace{f(x,y)}_{\text{objektivfunksjon}} \text{ når } \underbrace{\begin{cases} g(x,y)=a \\ g(x,y)\le a \\ g(x,y)<a \\ \vdots \end{cases}}_{\text{bibetingelser}}$$

objektivfunksjon = den funksjonen vi skal maksimere/minimere

Eks: max/min $f(x,y)=x^2+y^2$ når $2x+3y=6$



Bibetingelse:

$2x+3y=6$

(lineær likning $\Rightarrow$ rett linje)

$$\frac{3y}{3}=\frac{6-2x}{3}$$

$$y = 2-\tfrac{2}{3}x$$

rød linje = alle punkt som tilfredsstiller bibetingelsen = tillatte pkt

Defn: Et punkt er *tillatt* hvis det oppfyller alle bibetingelser. D kalles området av tillatte punkt.

Metode I: $2x+3y=6 \Leftrightarrow y=2-\frac{2}{3}x$

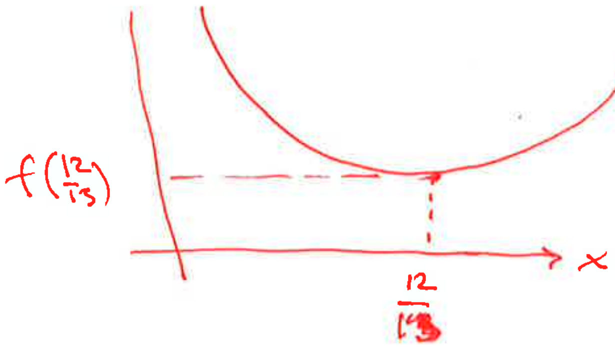
$$f(x,y)=x^2+y^2 = x^2+\left(2-\tfrac{2}{3}x\right)^2 = x^2+4-\tfrac{8}{3}x+\tfrac{4}{9}x^2 = \tfrac{13}{9}x^2-\tfrac{8}{3}x+4$$

$$f = \frac{13}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4$$

$$f' = \frac{13}{9} \cdot 2x - \frac{8}{3} = 0$$

$$\frac{26}{9}x = \frac{8}{3}$$

$$x = \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{26}_{13}} = \underline{\frac{12}{13}}$$



Minimumspkt:

$$\underline{x = \frac{12}{13}} \qquad y = 2 - \frac{2}{3}x$$

$$= \frac{26}{13} - \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{12}^{4}}{13}$$

$$= \underline{\frac{18}{13}}$$

$$(x, y) = \underline{\left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right)}$$

Minimumsverdi:

$$f\left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right) = \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{18}{13}\right)^2$$

$$= \frac{1}{13^2}\left(12^2 + 18^2\right) = \underline{\underline{\frac{468}{169}}} = \underline{\underline{\frac{36}{13}}}$$

Ingen maksimumsverdi

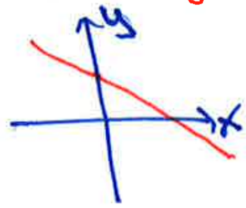
Oppsummering: Når vi løser bibetingelsen for en av variablene og setter inn i objektivfunksjonen, gjør vi om problemet til max/min av en funksjon i **én variabel** uten **bibetingelser**.

Nyttig å bruke når bibetingelsen er en **enkel likning**.

> **Ekstremverdisetningen**
> Hvis f er en kontinuerlig funksjon på en **kompakt** delmengde D av xy-planet, så har f et maks. og et min.

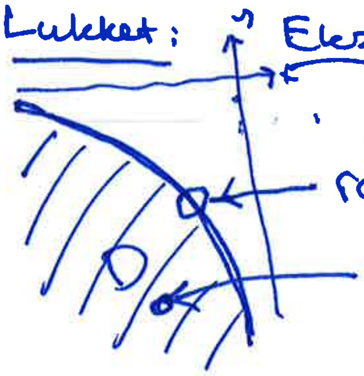
Bruk: f = objektivfunksjon
D = mengden av tillatte punkt (punkt som oppfyller alle bibetingelser)

$f = x^2 + y^2$ ✓
D = rød linje



Defn: D er **kompakt** hvis den er **lukket** og **begrenset**.

Lukket:

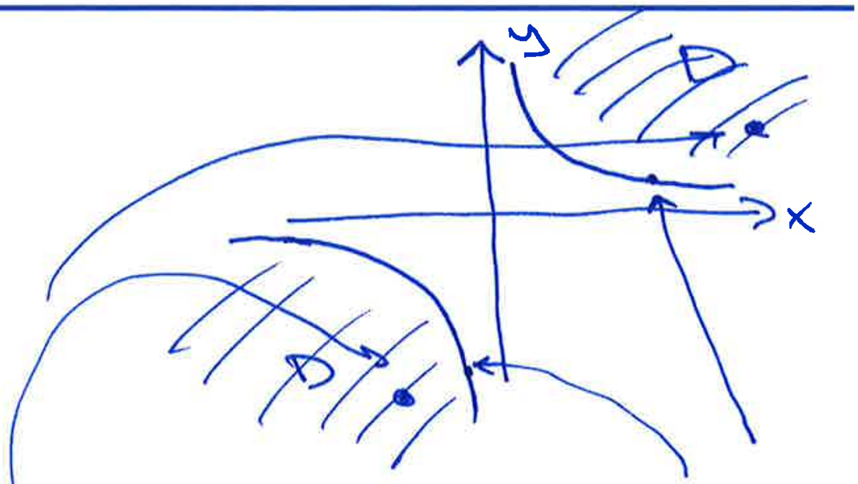


Eks: $xy \geq 1$
$x, y \leq 0$

Defn: Et **randpunkt** for D er et punkt som har både punkt i D og punkt utenfor D "uendelig nær".

Defn: Et punkt i D som ikke er randpkt kalles **indre pkt**.

Eks: $\boxed{xy \geq 1} \leftarrow D$



$xy = 1$: $y = 1/x$

$xy > 1$: $\xrightarrow{x>0}$ $y > 1/x$

$x<0$ $\downarrow$

$y < 1/x$

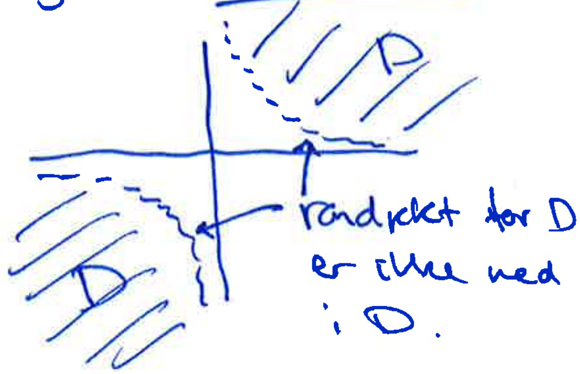
Randpkt: Alle pkt med $xy=1$
= hyperbelen

Indre pkt: Alle andre pkt

Defn: D er lukket hvis alle randpkt for D er med i D.

Eks: $xy \geq 1$: lukket

$xy > 1$: ikke lukket

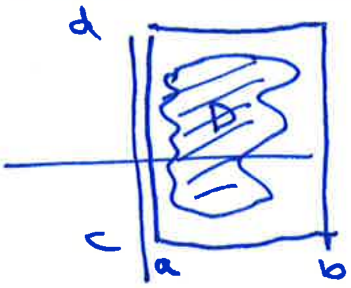


En mengde som er gitt ved likninger ($=$) eller lukkede ulikheter ($\leq, \geq$) er alltid lukket

Eks: $4x^2+7y^2=1$ lukket

$4x^2+y^2-x+3 \leq 7$ lukket

Begrenset:



begrenset

ikke begrenset

Defn: En mengde D er begrenset hvis det finnes et rektangel (med endelige sider) som inneholder alle punkt i D.

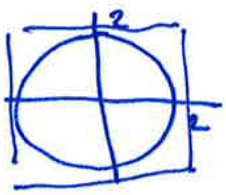
Dvs: Det fins tall a, b, c, d (som er endelige) slik at

$$\left.\begin{array}{l} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{array}\right\}$$

for alle (x,y) i D.

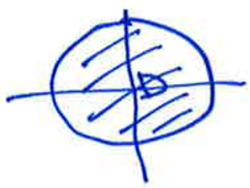
Metode:
for å avgjøre om D er begrenset
– skissere mengden D
– bruke ulikhetene

Eks: D: $x^2+y^2=4$



begrenset

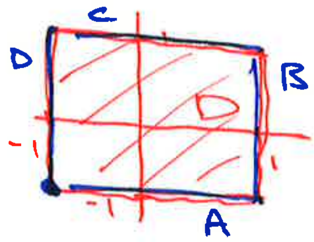
D: $x^2+y^2\le 4$



begrenset.

Eks: max/min $\underbrace{f(x,y)=e^{xy}}$ når $-1 \le x,y \le 1$

✓ kontinuerlig objektivfn.



lukket: ✓ pga ≤ ✓

begrenset: ✓

Ekstremverdisetn: det fins maks/min.

Metode: Finn alle kandidatpkt

① Stasjonære pkt: (indre pkt)

$$f'_x = e^{xy}\cdot y = 0 \qquad y=0$$
$$f'_y = e^{xy}\cdot x = 0 \qquad x=0$$
$$\Downarrow$$
$(0,0)$ ✓ tillatt indre

$f(0,0)=1$

② Randpkt:

A: $y=-1$, $-1\le x\le 1$

$$f = e^{x\cdot(-1)} = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$
avtagende
$$f' = e^{-x}\cdot(-1)$$

Størst verdi: $f(-1,-1) = e \approx 2.7$

Minst verdi: $f(1,-1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.37$

B: $x=1$, $-1\le y\le 1$ $f=e^{x}$ voksende — Størst: $f(1,1)=e$; Minst: $f(-1,1)=e^{-1}$

C: $y=1$, $-1\le x\le 1$ $f=e^{x}$ voksende — Størst: $f(1,1)=e$; Minst: $f(-1,1)=e^{-1}$

D: $x=-1$, $-1\le y\le 1$ $f=e^{-y}$ avtagende — Størst: $f(-1,-1)=e$; Minst: $f(-1,1)=e^{-1}$

Konklusjon: $f_{max} = e$; $(-1,-1)$ og $(1,1)$

$f_{min} = e^{-1} = 1/e$; $(-1,1)$ og $(1,-1)$