Plan

1. Stasjonære punkt og annenderivert-testen
2. Maximum- og minimumsproblemer
3. Ekstremverdisetningen

* Fagoppgave: Legges ut i morgen.
* Veiledning: Avlyst.

Repetisjon: $f(x,y)$

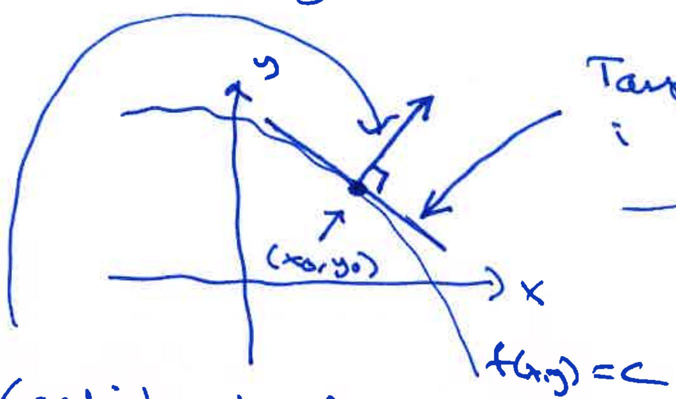
a) Hessematrisen: $H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$

- Symmetrisk matrise

$(f''_{xy} = f''_{yx})$

b) Nivåkurver: Tangent og gradient

$f(x,y) = c$:



Tangenten til nivåkurven $f(x,y)=c$ i pkt (x_0,y_0):

$$y - y_0 = -\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0)$$

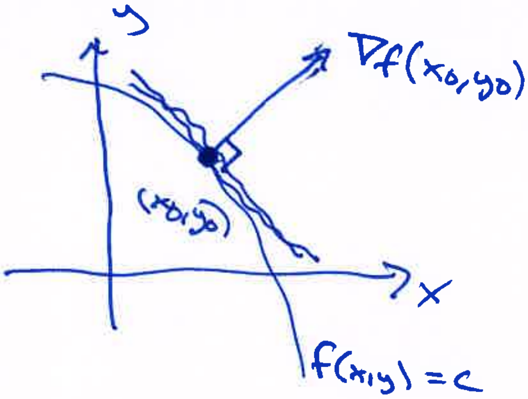
Stigningstallet til tangenten

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Gradient til f i (x_0,y_0):

$\nabla f = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix}$: vektor som vi tegner med utg.pkt i (x_0,y_0)

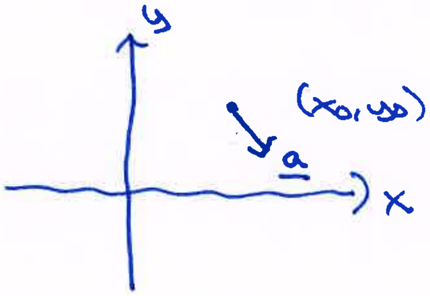
$$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f'_x(x_0,y_0) \\ f'_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$



- Gradienten <u>står normalt på</u> tangenten til nivåkurven i (x_0,y_0)
- Gradienten <u>peker i den retningen der f vokser raskest.</u>

<u>Retningsderiverte:</u>

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$



<u>Defn. av den retningsderiverte:</u>

$$f'_{\underline{a}} = a_1 \cdot f'_x + a_2 \cdot f'_y = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix}$$

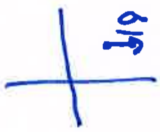
(marginal endring i f når vi beveger oss i retningen $\underline{a}$)

<u>Formel:</u>

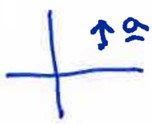
$$f'_{\underline{a}} = \underline{a} \cdot \nabla f$$

<u>Spesialtilfeller:</u>

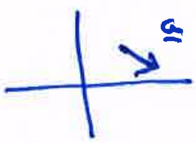
$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $f'_{\underline{a}} = 1 \cdot f'_x + 0 \cdot f'_y = f'_x$



$\underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $f'_{\underline{a}} = 0 \cdot f'_x + 1 \cdot f'_y = f'_y$



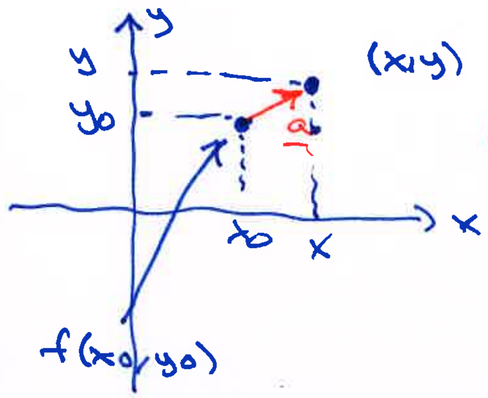
$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $f'_{\underline{a}} = 1 \cdot f'_x + (-1) \cdot f'_y$
$= f'_x - f'_y$



Lineære approksimasjoner:

To variabler: $f(x,y)$

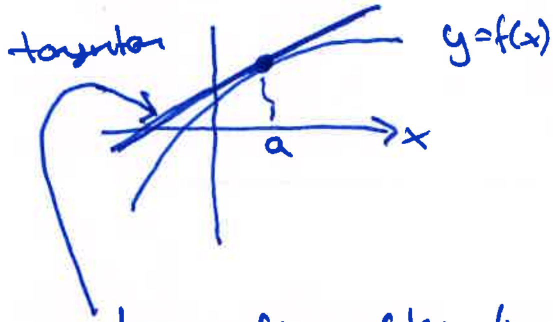
Tar utgangspunkt i et punkt (x_0, y_0).



$$\underline{a} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Lineær approksimasjon av f i nærheten av (x_0, y_0):

En variabel: $y = f(x)$



$L(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$

den lineære funksjonen som tilnærmer $f(x)$ best mulig nært $x = a$

Taylorpolynom av grad 1

$$\boxed{f(x,y) \simeq f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}$$

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \simeq f'_{\underline{a}}(x_0,y_0) = (x-x_0)\cdot f'_x(x_0,y_0) + (y-y_0)\cdot f'_y(x_0,y_0)$$

Eks: $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$ $\qquad (x_0,y_0) = (0,0) \to f = 0$

(x,y)

$f(0,0) = \ln(1) = 0$

$f'_x = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}\cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2+y^2+1}$ $\qquad f'_x(0,0) = 0$

$f'_y = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}\cdot 2y = \dfrac{2y}{x^2+y^2+1}$ $\qquad f'_y(0,0) = 0$

$$f(x,y) \simeq f(0,0) + f'_x(0,0)\cdot x + f'_y(0,0)\cdot y = \underline{\underline{0}}$$

(i) Stasjonære pkt og annenderivert-testen

Problem: $\boxed{\max/\min \ f(x,y)}$ Optimerings-problem (uten bibetingelser)

a) Stasjonære pkt for f:

Defn: Et stasjonært pkt er et pkt hvor $f'_x = f'_y = 0$.

Betingelsene $\left\{ \begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array} \right\}$ kalles første-ordens betingelser. (FOC)

Eks: $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y$

FOC: $\left\{ \begin{array}{l} f'_x = 2x - 2 = 0 \\ f'_y = 2y + 4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \end{array}$

Stasjonære pkt: $(x,y) = \underline{\underline{(1,-2)}}$

Eks: $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

FOC $\left\{ \begin{array}{l} f'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y = -3x + 3y^2 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x^2 = y \\ y^2 = x \end{array} \Rightarrow (x^2)^2 = x$

$x^4 = x$

$x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0$

$x = 0$ eller $x^3 = 1$

$\underline{x=0}$ $\Downarrow$ $\underline{y=0}$ | $x^3 = 1$, $x = \sqrt[3]{1} = 1$, $\underline{y = 1}$

Stasjonære pkt: $(x,y) = \underline{\underline{(0,0)}}, \underline{\underline{(1,1)}}$

Resultat: Hvis (x,y) er et maks eller min for f, så har vi enten:

hoved-tilfellet → i) (x,y) stasjonært pkt

ii) (x,y) er et punkt der f'_x eller f'_y ikke er definert

iii) (x,y) er et randpkt i D_f.

Kandidat pkt: pkt som kan være maks/min for f

Eks: $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y$, $D_f = \mathbb{R}^2$ (alle pkt (x,y))

$f'_x = 2x - 2$

$f'_y = 2y + 4$

Kandidat pkt:
Stasjonære pkt: $(x,y) = \underline{(1,-2)}$

Eks: $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$, $D_f = \mathbb{R}^2$

$f'_x = 3x^2 - 3y$

$f'_y = -3x + 3y^2$

Kandidat pkt:
Stasjonære pkt: $(x,y) = \underline{(0,0)}$, $\underline{(1,1)}$

Eks: $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y$

$f'_x = 2x - 2$ **Stasj. pkt:** $(x,y) = (1,-2)$

$f'_y = 2y + 4$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H(f)(1,-2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det = 4 > 0$

$\operatorname{tr} = 4 > 0$

$\Downarrow$

$(1,2)$ er lokalt minimum

Eks: $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

$f'_x = 3x^2 - 3y$ **Stasj. pkt:** $(x,y) = (0,0), (1,1)$

$f'_y = -3x + 3y^2$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$\det = -9$ $\det = 36 - 9 = 27 > 0$

$(0,0)$ sadelpkt $\operatorname{tr} = 12 > 0$

$(1,1)$ lokalt min

Forklaring av andrederivert-test:

(x^*, y^*) stasjonært pkt.

$$H(f)(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Tilfelle I: $\det H(f)(x^*,y^*) = AC - B^2 > 0$

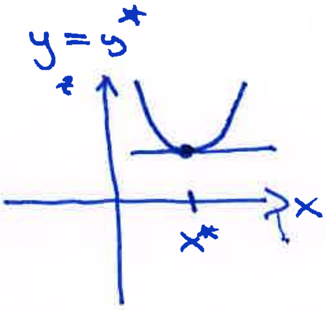
Hvis $AC - B^2 > 0$, så er $AC > B^2 \geq 0$,

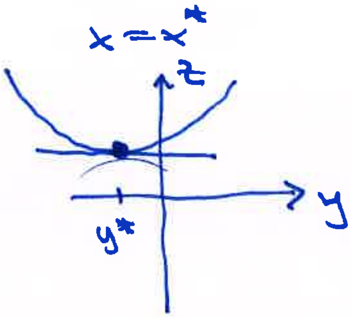
dvs $AC > 0$, eller $\begin{cases} A > 0,\ C > 0 & \text{(tilfelle 1)} \\ A < 0,\ C < 0 & \text{(tilfelle 2)} \end{cases}$

$A > 0,\ C > 0$:

$f''_{xx}(x^*,y^*) = A > 0$

$f''_{yy}(x^*,y^*) = C > 0$





lokalt min.

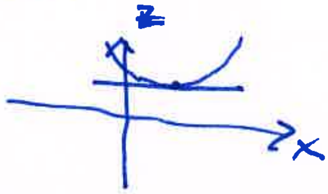
Tilfelle II: $\det H(f)(x^*,y^*) = AC - B^2 < 0$

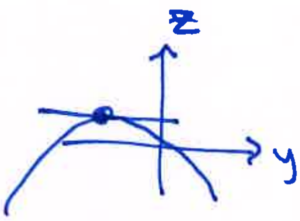
Hvis $AC - B^2 < 0$, så er $AC < 0$ eller $AC < B^2$

$AC < 0$: $A > 0,\ C < 0$

eller

$A < 0,\ C > 0$





Klassifikasjon av stasjonære pkt:

Defn: Et stasjonært pkt (x^*, y^*) kalles

i) et lokalt minimum hvis $f(x^*, y^*) \leq f(x,y)$ for alle pkt (x,y) nært (x^*, y^*)

ii) et lokalt maksimum hvis $f(x^*, y^*) \geq f(x,y)$ for all pkt (x,y) nært (x^*, y^*)

iii) et sadelpkt i alle andre tilfeller

Andre-derivert-testen:

Anta at (x^*, y^*) er et stasjonært pkt. for f.

Vi ser på matrisen

$$H(f)(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x^*, y^*) & f''_{xy}(x^*, y^*) \\ f''_{yx}(x^*, y^*) & f''_{yy}(x^*, y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

og regner ut:

$$\det H(f)(x^*, y^*) = AC - B^2$$
$$\operatorname{tr} H(f)(x^*, y^*) = A + C$$

Da har vi:

i) $AC - B^2 > 0$, $A + C > 0$ $\Rightarrow$ (x^*, y^*) lokalt min

ii) $AC - B^2 > 0$, $A + C < 0$ $\Rightarrow$ (x^*, y^*) lokalt maks

iii) $AC - B^2 < 0$ $\Rightarrow$ (x^*, y^*) sadelpkt.

Hvis $AC - B^2 = 0$, gir andrederivert-testen ingen konklusjon.

(2) Fra lokale maks/min til globale maks/min

Metode for å finne kandidatpkt og klassifisere dem lokalt (som lokale maks/min/sadelpkt)

(1) Finn alle stasjonære pkt for f ved å løse $f'_x = f'_y = 0$. Legg til evt. pkt der f'_x / f'_y ikke eksisterer og evt. randpkt.

$\rightarrow$ Liste m/ kandidatpkt.

(2) Klassifiser alle stasjonære pkt som lokalt maks/lokalt min/sadelpkt vha andrederivert-testen:

$$H(f)(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} : \begin{array}{ll} AC-B^2>0,\ A>0 & \Rightarrow \text{lokalt min} \\ AC-B^2>0,\ A<0 & \text{" maks} \\ AC-B^2<0 & \text{sadelpkt} \end{array}$$

> Andrederivert-testen fungerer ikke hvis vi har i) kandidatpkt som ikke er stasjonære ii) stasjonærpkt slik at $AC-B^2=0$

For å finne globale maks/min:

globalt maks $\Rightarrow$ lokalt maks

globalt min $\Rightarrow$ lokalt min

Eks: $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y$

Kandidatpkt: $(x,y) = (1,-2)$

lokalt min

$\Downarrow$

Ingen globale maks

Globale min: $(x,y) = (1,-2)$ er eneste mulighet

$f(1,-2) = -5$

$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y$$

$$= x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 5$$

$$= \underbrace{(x-1)^2 + (y+2)^2}_{\geq 0} - 5 \geq -5$$

$\Downarrow$

$(x,y) = \underline{\underline{(1,-2)}}$ er globalt min,

$f_{min} = \underline{\underline{-5}}$