Plan

1. Partiellderivasjon og Hesse-matrisen
2. Tangenten til en nivåkurve
3. Gradienten og de retningsderiverte

MET11804: korte fasoppgave

MET11806: fasoppgave

Repetisjon:

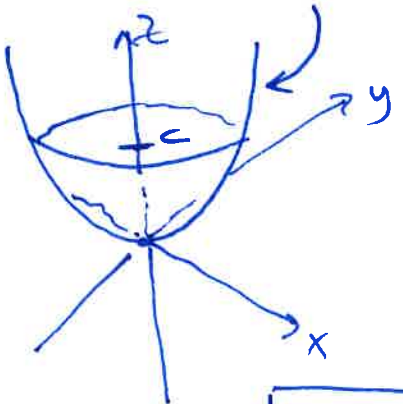
Funksjoner: to variable: $f(x,y)$

a) Definisjonsområde D_f = alle tallpar (x,y) som vi kan sette inn i f

Verdimengde V_f = alle funksjonsverdier $z=f(x,y)$ vi kan få

b) Grafen til f: flate (to-dim. figur) i 3-dim. koordinatsystem (xyz-koord.sys.)

$z=f(x,y)$



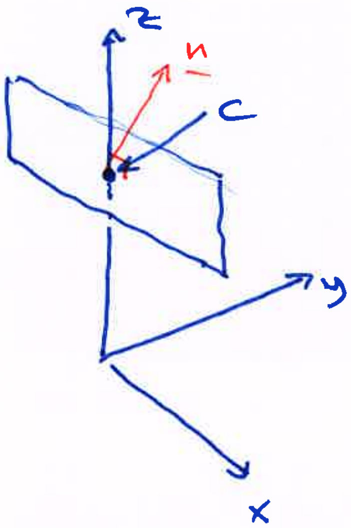
Snittflater: 1) nivåkurver $\boxed{f(x,y)=c}$ ← $z=c$

= alle pkt på grafen til f i høyde (z-verdi) lik c

2) vertikale snitt: $x=a$ eller $y=b$

c) Lineære funksjoner : $f(x,y) = ax + by + c$

Geometrisk beskrivelse av grafen til en lineær funksjon:



① Lineær funksjon ⟺ grafen er et plan (flate uten krumning)

② Grafen skjærer z-aksen i c

③ Normalvektoren er $\begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{n}$ (vektoren står normalt på planet)

Indreprodukt / prikkprodukt:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} : \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n \cdot v_n$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$$

Resultat:

$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \iff \underline{u} \perp \underline{v}$ ($\underline{u}$ står normalt på $\underline{v}$, vinkelen er $90°$)

Oppgaveark 26:

3d) $f = x^2 - 2x + 4y^2$ $\qquad c = -2, -1, 0, 1, 2$

$f(x,y) = c$: $\quad x^2 - 2x + 4y^2 = c$

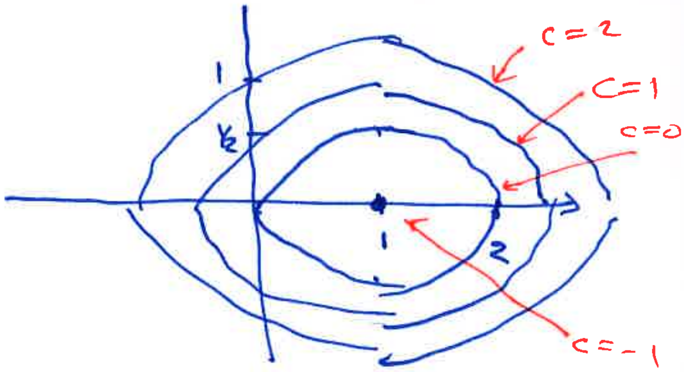
$$\underbrace{x^2 - 2x + 1} + 4y^2 = c + 1$$

$$(x-1)^2 + 4\cdot y^2 = c+1 \quad | : (c+1)$$

$$\frac{(x-1)^2}{c+1} + \frac{4y^2 \cdot \frac{1}{4}}{c+1 \cdot \frac{1}{4}} = 1$$

$c > -1$: ellipse med senter $(1,0)$ og halvakser $a = \sqrt{c+1}$, $b = \sqrt{c+1}/2$

$$\frac{(x-1)^2}{c+1} + \frac{y^2}{(c+1)/4} = 1 \leftarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$



$c = -1$: $(x,y) = (1,0)$ ett pkt.

$c < -1$: ingen pkt.

7 Grafen til $f(x,y) = 3x - 4y + 1$:

Et plan som skjærer z-aksen i $z = 1$ og har normalvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$z = 3x - 4y$

$0 = 3x - 4y - z$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

6 f) $f(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = x \cdot y^{-1} - y \cdot x^{-1}$

$f'_x = y^{-1} - y \cdot (-1) x^{-2} = \underline{\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}}$

$f'_y = x \cdot (-1) y^{-2} - x^{-1} = \underline{-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}}$

① Partiell derivasjon : $f(x,y)$ funksjon i to variable

Defn:

$$\boxed{\begin{aligned} f'_x &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \\ f'_y &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \end{aligned}}$$

$\leftarrow \frac{\Delta z}{\Delta x}$, y konstant

$\leftarrow \frac{\Delta z}{\Delta y}$, x konstant

Hvordan finne f'_x, f'_y:

Bruker vanlige derivasjonsregler, men $\begin{cases} f'_x : & y = \text{konst.} \\ f'_y : & x = \text{konst.} \end{cases}$

Eks: $f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 + 2y$

$f'_x = 2x - 4$

$f'_y = 2y + 2$

$f(x,y) = x^3 - 3xy + y^2$

$f'_x = 3x^2 - 3y \cdot 1 + 0$

$= \underline{\underline{3x^2 - 3y}}$

$f'_y = 0 - 3x \cdot 1 + 2y$

$= \underline{\underline{-3x + 2y}}$

Tolkning av de partiell deriverte:

$f(x,y)$: funksjon i to variable

$(x,y)=(a,b)$: et punkt

$f'_x(a,b)$: stigningstallet til tangenten til f i (a,b) i <u>x-retning</u>

$f'_y(a,b)$: stigningstallet til tangenten til f i (a,b) i <u>y-retning</u>

Eks:

$f(x,y) = x^2-4x+y^2+2y$

$f'_x = 2x-4$

$f'_y = 2y+2$

Pkt: $(x,y)=(1,1)$

$f'_x(1,1) = 2\cdot 1-4 = \underline{-2}$

$f'_y(1,1) = 2\cdot 1+2 = \underline{4}$

Defn: $\boxed{\text{Et } \underline{\text{stasjonært pkt}} \text{ for } f \text{ er et pkt der } f'_x=0 \text{ og } f'_y=0.}$

Eks: $f(x,y) = x^2-4x+y^2+2y$

$$\left.\begin{array}{ll} f'_x = 2x-4 = 0 & x=2 \\ f'_y = 2y+2 = 0 & y=-1 \end{array}\right\} \quad \underline{\text{Stasjonære pkt:}} \quad (x,y) = \underline{\underline{(2,-1)}}$$

Annenderiverte og Hesse-matrisen:

Eks: $f = x^2 - 4x + y^2 + 2y$

$f'_x = \underline{2x-4}$ $\qquad f''_{xx} = (2x-4)'_x = \underline{2}$ $\qquad f''_{xy} = (2x-4)'_y = 0$

$f'_y = \underline{2y+2}$ $\qquad f''_{yx} = (2y+2)'_x = \underline{0}$ $\qquad f''_{yy} = (2y+2)'_y = \underline{2}$

Hesse-matrisen $\rightarrow$ $H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}}$

Eks: $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

$f'_x = 3x^2 - 3y$ $\qquad f''_{xx} = 6x \qquad f''_{xy} = -3$

$f'_y = -3x + 3y^2$ $\qquad f''_{yx} = -3 \qquad f''_{yy} = 6y$

$$\underline{\underline{H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}}}$$ Hesse-matrisen

Pkt (1,1): $H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

Resultat: $\boxed{\text{For alle "vanlige" funksjoner, så er } f''_{xy} = f''_{yx}, \text{ dvs } H(f) \text{ er symmetrisk.}}$

2 Tangenter til nivåkurver

Eks: $f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 + 2y$

Nivåkurver: $f(x,y) = c$

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y = c$$

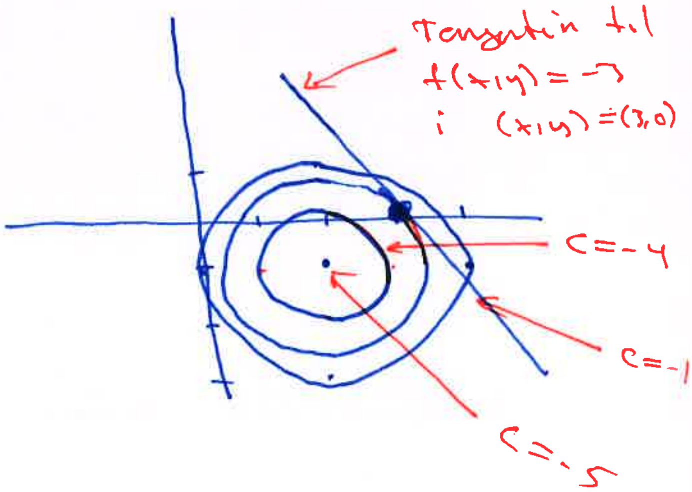
$$\underbrace{x^2 - 4x + 4} + \underbrace{y^2 + 2y + 1} = c + 4 + 1$$

$$\boxed{(x-2)^2 + (y+1)^2 = c+5}$$

$c > -5$: Sirkel m/sentrum $(2,-1)$ radius $\sqrt{c+5}$

$c = -5$: Et pkt. $(2,-1)$

$c < -5$: Ingen pkt



Et pkt på nivåkurve:

$(x,y) = (3,0)$: $f(3,0) = 9 - 12 + 0 + 0 = -3$

$\Rightarrow (3,0)$ ligger på $f(x,y) = -3$

Likning til tangenten til $\underbrace{f(x,y) = -3}_{\text{nivåkurve}}$ i $\underbrace{(x,y) = (3,0)}_{\text{et pkt på nivåkurven.}}$

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 0 = a \cdot (x - 3)$$

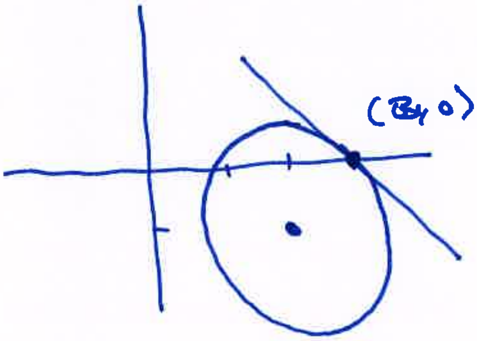
Resultat: Stigningstallet til nivåkurven $f(x,y) = c$ er gitt ved $y' = -\dfrac{f'_x}{f'_y}$

Eks: $f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 + 2y$

$$f'_x = 2x - 4 \qquad f'_y = 2y + 2$$

$f(x,y) = c$:

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x-4}{2y+2}$$



$(3,0)$

$f(x,y) = -3$

I $(3,0)$:

$$y'(3,0) = -\frac{2\cdot 3 - 4}{2\cdot 0 + 2} = -\frac{2}{2} = -1$$

Tangent:

$$y - 0 = -1\cdot(x-3)$$
$$y = -(x-3)$$
$$y = 3 - x$$

Oppsummering:

- Alle pkt (x,y) ligger på en nivåkurve $f(x,y) = c$ med $c = f(x,y)$.
- Tangenten til nivåkurven har stigningstall $y' = -f'_x / f'_y$

Hvorfor: $y' = -f'_x / f'_y$

Nivåkurve: $f(x,y) = c$

$$f'_x + f'_y \cdot y' = 0$$
$$\frac{f'_y \cdot y'}{f'_y} = \frac{-f'_x}{f'_y}$$
$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Eks: $f(x,y) = x^2 y - xy^2$

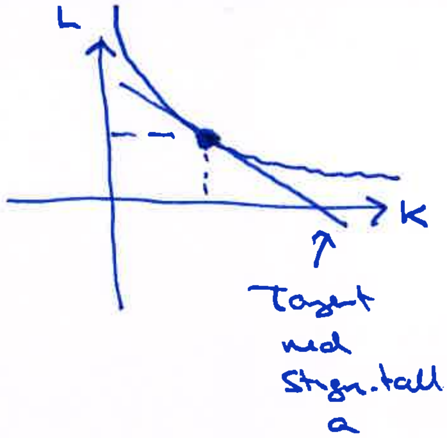
Nivåkurve: $f(x,y) = 2$

$$x^2 y - xy^2 = 2 \quad |\,'_x$$
$$(2x\cdot y + x^2\cdot y') - (1\cdot y^2 + x\cdot 2y\cdot y') = 0$$
$$\underbrace{(2xy - y^2)}_{f'_x} + \underbrace{(x^2 - 2xy)}_{f'_y}\, y' = 0$$

Eks: $f(K,L) = 1.5\, K^{0.6} L^{0.4}$

Nivåkurve: $f(K,L) = c$

$$a = -\frac{f'_K}{f'_L} = \underline{\underline{-1.5\,\frac{L}{K}}}$$



$$f'_K = 1.5 \cdot 0.6 \cdot K^{-0.4} \cdot L^{0.4} = \underline{0.9\, K^{-0.4} L^{0.4}}$$

$$f'_L = 1.5 \cdot K^{0.6} \cdot 0.4\, L^{-0.6} = 0.6\, K^{0.6} L^{-0.6}$$

$$\frac{f'_K}{f'_L} = \frac{0.9\, K^{-0.4} L^{0.4}}{0.6\, K^{0.6} L^{-0.6}} = \underbrace{1.5\,\frac{L}{K}}_{\text{marginal substitusjonsbrøk}}$$

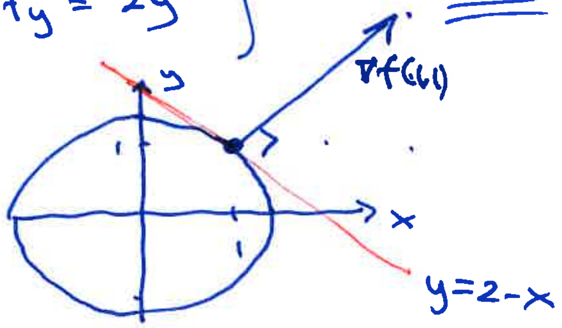
③ Gradienten og de retningsderiverte

Defn: Gradienten til $f(x,y)$ er vektoren

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix}$$

Eks: $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x \\ f'_y &= 2y \end{aligned}\right\} \quad \nabla f = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}}}$$



I pkt. (1,1):

$$\nabla f(1,1) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

$$\boxed{y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x}{2y} \qquad y'(1,1) = -1}$$

$f(1,1) = 2 \Rightarrow$ (1,1) ligger på $\underline{f(x,y) = 2}$

$x^2 + y^2 = 2$

sirkel, $r = \sqrt{2}$

Tangent:

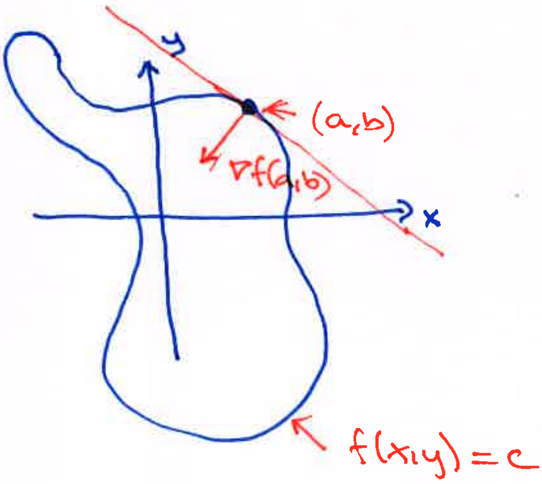
$y - 1 = -1(x-1)$

$y = -x + 2 \qquad \underline{\underline{y = 2 - x}}$

Tolkningen til gradienten:

i) Gradienten til f i (a,b) står normalt på tangenten til nivåkurven til f i (a,b).

ii) Gradienten angir retningen der f vokser raskest.



Med denne retningen på gradienten ∇f, vokser f når vi går "innover" (langs gradienten).