Plan

1. Funksjoner i to variabler
2. Grafer og nivåkurver
3. Lineære funksjoner
4. Partiell derivasjon

Repetisjon:

i) Regneregler for matriser:

a) $|AB| = |A| \cdot |B|$

b) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

c) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

ii) Determinanter:

Hvis en rad er en lineær kombinasjon av de andre radene i A, så er $|A| = 0$

Hvis en kolonne i A er en lineærkombinasjon av de andre kolonnene, så er $|A| = 0$

Eks:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$= 1 \cdot (4+5) - 1 \cdot (3+4) + 2 \cdot (15-16)$$
$$= 9 - 7 - 2 = \underline{\underline{0}}$$

$R(3) = R(1) + R(2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \cdot (-1) \cdot (-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

① Funksjoner i to variabler

Eks:

1) $f(x,y) = \underbrace{3x+y}_{\text{lineært uttrykk}}$ — lineær funksjon

2) $f(x,y) = \underbrace{x^2+y^2}_{\text{andregrads-uttrykk}}$ — kvadratisk funksjon

3) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ — rasjonal funksjon

Generelt: $f(x,y) =$ funksjonsuttrykk i to variabler x, y

Eks: $f(x,y) = x^2+y^2$

(x,y)	$f(x,y) = z$
$(0,0)$	$f(0,0) = 0$
$(1,0)$	$f(1,0) = 1$
$(0,1)$	$f(0,1) = 1$
$\vdots$	

(x,y): uavhengige variabler (input)

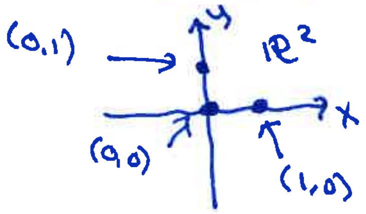
$f(x,y)$: funksjonsverdier (output)

Definisjonsområde: D_f

alle tallpar (x,y) som vi tillater å sette inn i f

$f(x,y) = x^2+y^2$ $\quad D_f = \mathbb{R}^2$

(alle tallpar (x,y) i det to-dim. koord. systemet)



Eks: $f(x,y) = 3x + y$ $\qquad D_f = \mathbb{R}^2$ – alle tallpar (x,y)

$f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ $\qquad D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \neq 0\}$

alle tallpar (x,y) slik at $x - y \neq 0$

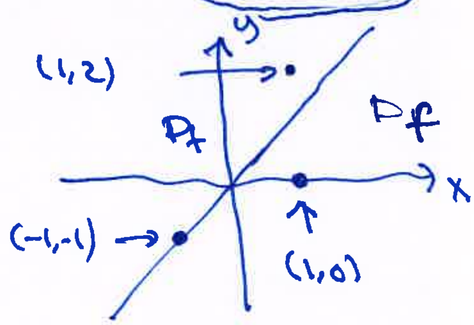
$f(1,0) = \dfrac{1+0}{1-0} = 1$

$f(1,2) = \dfrac{1+2}{1-2} = -3$

$f(-1,-1) = \dfrac{-1-1}{-1+1} \text{ “}=\text{” } \dfrac{-2}{0}$

ikke definert

D_f : $x - y \neq 0$

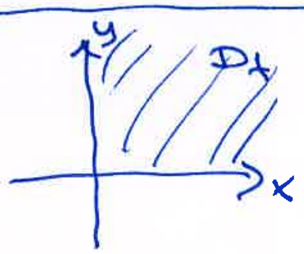


$f(x,y) = 23 \cdot x^{1.2} y^{0.7}$ $\qquad D_f : x, y \geq 0$

Cobb-Douglas funksjoner

$y^{0.7} = y^{7/10} = \sqrt[10]{y^7}$

$(-1)^{0.7}$: ikke definert



Verdimengde: V_f – alle funksjonsverdier $z = f(x,y)$ vi kan oppnå ved å sette inn alle (x,y) i D_f.

Eks: $f(x,y) = 3x + y$ $\qquad V_f = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^2 + y^2$ $\qquad V_f = [0, \rightarrow)$

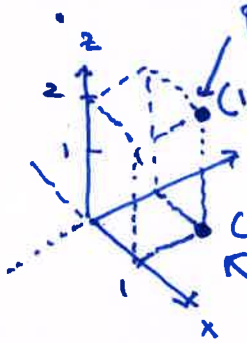
② Grafer og nivåkurver

Defn: Grafen til en funksjon f i to variable består av alle (x,y,z), der (x,y) i D_f og $z=f(x,y)$.

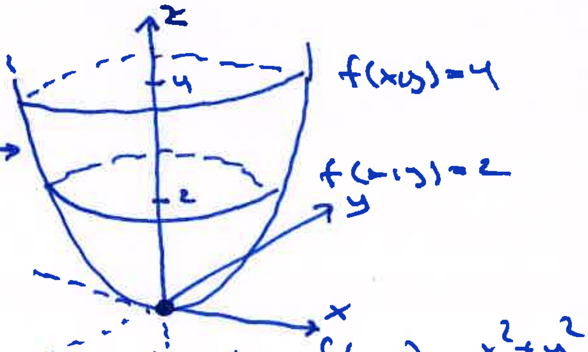
$\boxed{z=f(x,y)}$

Eks: $f(x,y) = x^2+y^2 \rightarrow \boxed{z=x^2+y^2}$

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)=(1,1)\\ z=f(x,y)=2\end{array}\right\} \begin{array}{l}(x,y,2)\\ =(1,1,2)\end{array}$$



$z=f(x,y)$



grafen til $f(x,y)=x^2+y^2$

Grafen til f = flate

Defn: Nivåkurver: $f(x,y)=c$ for en konstant c : alle pkt. på grafen til f i høyde $z=c$

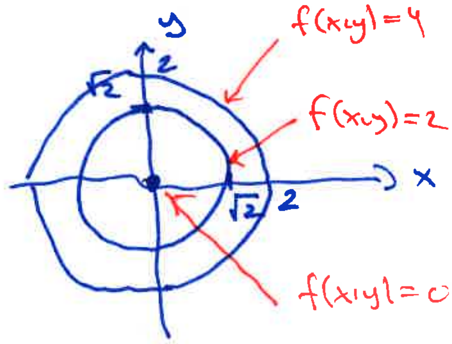
Eks: $f(x,y)=x^2+y^2$

$f(x,y)=2$: $x^2+y^2=2$ } sirkler

$f(x,y)=4$: $x^2+y^2=4$ }

$f(x,y)=0$: $x^2+y^2=0$ } pkt.

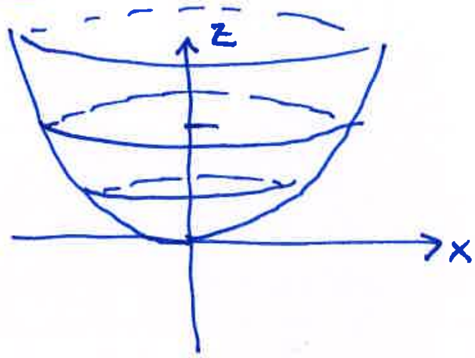
$f(x,y)=-1$: $x^2+y^2=-1$ } ingen pkt.



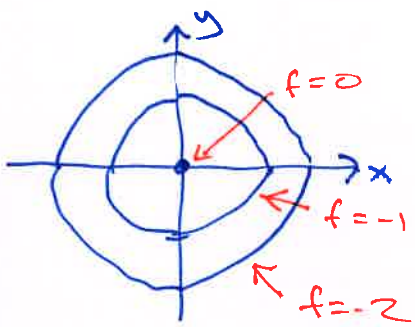
$z = f(x,y) = x^2 + y^2$:

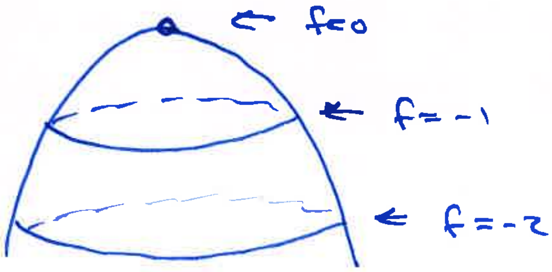
Kutt: $y = c$

$c = 0$: $z = x^2$



Eks: $f(x,y) = -x^2 - y^2$





Nivåkurver:

$f(x,y) = 1$: $-x^2 - y^2 = 1$

$x^2 + y^2 = -1$

ingen pkt.

$f(x,y) = 0$: $-x^2 - y^2 = 0$

$x^2 + y^2 = 0$

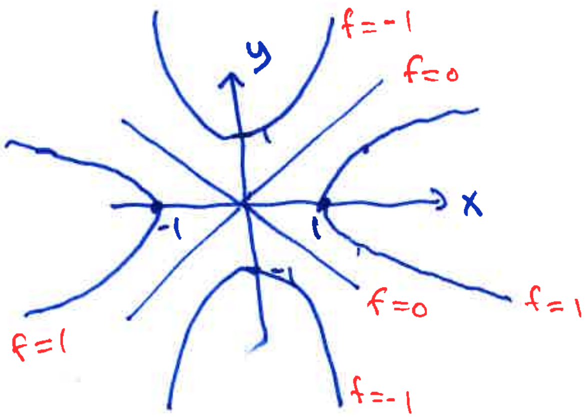
$(0,0)$

$f(x,y) = -1$: $-x^2 - y^2 = -1$

$x^2 + y^2 = 1$

sirkel

Eks: $f(x,y) = x^2 - y^2$



Nivåkurver:

$f(x,y) = 0$: $x^2 - y^2 = 0$

$(x+y)(x-y) = 0$

$y = -x$ eller $y = x$

$f(x,y) = 1$: $x^2 - y^2 = 1$

$y^2 = x^2 - 1$

$y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$

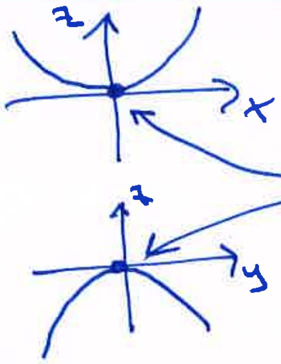
$f(x,y) = -1$: $x^2 - y^2 = -1$

$y^2 = x^2 + 1$

$y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$

$\underline{y=0}$: $z = x^2$

$\underline{x=0}$: $z = -y^2$



Sadelpkt

<u>Oppsummering:</u>

$z = x^2 + y^2$ $\qquad$ $z = -x^2 - y^2$ $\qquad$ $z = x^2 - y^2$

minimum

maksimum

sadelpkt

3 Lineære funksjoner

Defn: En lineær funksjon i to variabler har formen

$$f(x,y) = ax + by + c$$

der a, b, c er konstanter.

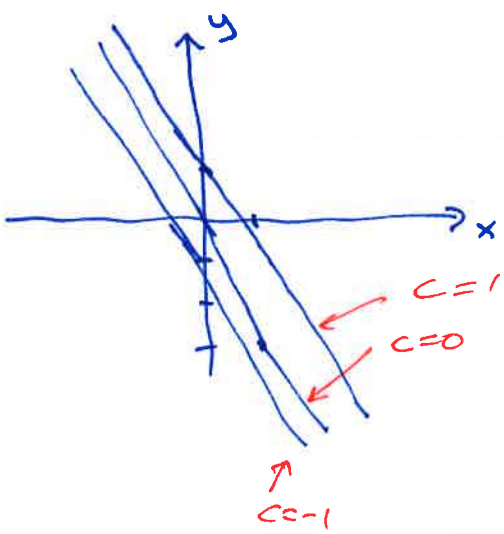
Eks. $f(x,y) = 3x + y$

$f(x,y) = x + y - 1$

Resultat: $\boxed{\text{Graf til } f \text{ er et plan}} \iff \boxed{f \text{ er lineær}}$

Et plan: ingen krumning

Eks: $z = 3x + y$



Nivåkurver: $f(x,y) = c$

$c=0$: $3x+y=0$: $y = -3x$

$c=1$: $3x+y=1$: $y = -3x+1$

$c=2$: $3x+y=2$: $y = -3x+2$

$c=-1$: $3x+y=-1$: $y = -3x-1$

$z = ax + by$: $\quad ax + by - z = 0$

$(c=0)$

$$\begin{pmatrix} a & b & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$f(x,y) = ax + by$
(linear form)

$\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$ kalles normalvektoren til planet $z = ax + by$.

Eks: $z = 3x + y$

$\underline{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Grafen til $z = 3x + y$ består av alle vektorer som står normalt på $\underline{n}$.

Indreprodukt / prikkprodukt:

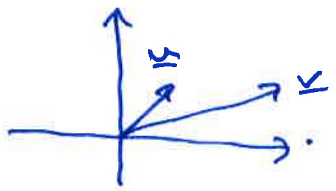
$\underline{u}, \underline{v}$: n-vektorer

$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

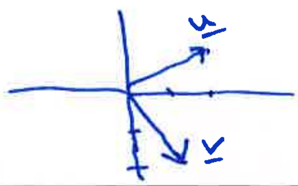
$$\boxed{\begin{aligned} \underline{u} \cdot \underline{v} &= \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n \\ &= \underbrace{\underline{u}^T \cdot \underline{v}}_{\text{mult. av matriser}} = (u_1\ u_2 \dots u_n) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

Eks: 1) $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{u} \cdot \underline{v} = (1 \ \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 5$

2) $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \underline{u} \cdot \underline{v} = (2 \ \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$



$\underline{u} \cdot \underline{v} = 5$



$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$

Resultat:

$$\boxed{\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \iff \underline{u} \perp \underline{v}}$$

$\underline{u}$ normalt på $\underline{v}$ (90°)

Eks: $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = (1 \ \ 2 \ \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 4$$

Hvilke vektorer står normalt på $\underline{u}$?

$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{u} \cdot \underline{v}_1 = 0$

$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{u} \cdot \underline{v}_2 = 0$

Alle vektorer som står normalt på $\underline{u}$:

$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ med $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$(1 \ \ 2 \ \ -1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$x + 2y - z = 0$$

$$(1 \ \ 2 \ \ -1 \ | \ 0)$$

y, z fri

$\underline{x} + 2y - z = 0$

$\Rightarrow x = \underline{-2y + z}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y + z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$= y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{f(x,y) = ax + by + c}$:

Grafen kan beskrives geometrisk :

- plan
- $\underline{\text{normalvektor}}$: $\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$
- skjæring med z-aksen : c