Plan

1. Matriselikninger
2. Regning med matriser
3. Inverse matriser og determinanter

Repetisjon:

i) Determinant vha Gauss-eliminasjon:

Hvis $A \to \dots \to E$ er elementære radoperasjoner av Type III (å legge til et multippel av en rad til en annen rad), så er $|A| = |E|$.

Hvis E er en trappeform, så er $|E|$ produktet av elementene på diagonalen.

ii) Lineære system: kvadratisk $(n \times n)$ med utvidet matrise $(A \mid \underline{b})$

Spesialtilfelle: $\left\{ \begin{matrix} \#\text{ likn.} \\ = \#\text{ ukjente} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow$ A er en kvadr. matrise

$|A| \neq 0$: Én løsning
$|A| = 0$: ingen løsn. eller uendelig mange løsn.

iii) Lineære system med parametre: $n \times n$ lineært system

Metode: a) Bruker $|A|$ til å avgjøre (i) Én løsning (ii) Ingen eller uend. mange løsn.

b) I tilfelle (i): Kramers regel

c) I tilfelle (ii): Løser vha Gauss for hver verdi av a med $|A| = 0$.

Kramers regel:

$(A|\underline{b})$ $n\times n$ lin. system med $|A|\neq 0$

$$x_1 = \frac{|A_1(\underline{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\underline{b})|}{|A|} \quad \ldots \quad x_n = \frac{|A_n(\underline{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\underline{b})$ er matrisen vi får ved å bytte ut kolonne i i A med $\underline{b}$.

iv) Vektorlikninger

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r : & n\text{-vektorer} \\ \underline{w} : & n\text{-vektor} \end{array} \right\}$$

$\underline{w} = x_1 \cdot \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + \ldots + x_r \underline{v}_r$

vektorlikning med ukjente $x_1, x_2, \ldots, x_r$

$\Updownarrow$

Lineært system $(n\times r)$ med utvidet matrise:

$$\underbrace{\left(\underline{v}_1 \middle| \underline{v}_2 \middle| \cdots \middle| \underline{v}_r \right.}_{A} \left\| \underbrace{\underline{w}}_{\underline{b}} \right)$$

Lineær kombinasjon:

Lineærkombinasjonene til $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r\}$ er alle vektorer på formen

$$c_1 \cdot \underline{v}_1 + c_2 \cdot \underline{v}_2 + \ldots + c_r \underline{v}_r$$

for tall $c_1, c_2, \ldots, c_r$.

$\underline{w}$ er en lineærkomb. av $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r\}$

$\Updownarrow$

$\underline{w} = x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + \ldots + x_r \underline{v}_r$ har løsninger

Oppgavesett 23

4b $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ $\quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & -3 \end{array}\right) = (A|\underline{b})$

$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a(a^2-1) - 1\cdot(a-1) + 1\cdot(1-a)$

$= a(a^2-1) + (-a+1+1-a)$

$= a(a^2-1) + (-2a+2) = a(a+1)\underline{(a-1)} - 2\underline{(a-1)}$

$= (a-1)\cdot(a(a+1)-2) = (a-1)(a^2+a-2)$

$= (a-1)\cdot(a+2)(a-1) = \underline{(a-1)^2\cdot(a+2)}$

$\underline{|A|=0:}$ $\quad a=1,\ a=-2$

i) $|A| \neq 0$: én løsning $\quad x = \dfrac{|A_1(\underline{b})|}{|A|} = \dfrac{\cancel{a^2+a-2}}{(a-1)(\cancel{a^2+a-2})} = \underline{\underline{\dfrac{1}{a-1}}}$

$(a \neq 1, -2)$

$|A_1(\underline{b})| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ -3 & 1 & a \end{vmatrix} = 1\cdot(a^2-1) - 1\cdot(2a+3) + 1\cdot(2+3a)$

$= a^2 + a - 2$

$y = \dfrac{|A_2(\underline{b})|}{|A|} = \dots$

$z = \dfrac{|A_3(\underline{b})|}{|A|} = \dots$ $\Big\}$ tilsv. måte.

ii) $\underline{|A|=0:}$

$(a=1,\ a=-2)$

$\underline{a=1:}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$ -1, -1

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$ $\quad$ $\underline{\text{ingen løsn}}$ for $a=1$

$\underline{a=-2:}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\underline{\text{uendelig mange løsn}}$ for $a=-2$

9. $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\end{pmatrix}$ $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\7\end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$

$\underline{b}$ lin. komb. av $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \iff x_1 \cdot \underline{v}_1 + x_2 \cdot \underline{v}_2 + x_3 \underline{v}_3 = \underline{b}$ har løsn.

$\Updownarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\1&2&-1&b\\1&4&1&c\\1&3&7&d\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&-2&b-a\\0&3&0&c-a\\0&2&6&d-a\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -3 \\ -2 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&-2&b-a\\0&0&6&c-a-3(b-a)\\0&0&10&d-a-2(b-a)\end{array}\right) -\frac{10}{6}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&-2&b-a\\0&0&6&2a-3b+c\\0&0&0&\underbrace{a-2b+d-\frac{10}{6}\cdot(2a-3b+c)}\end{array}\right)$$

Systemet har løsn $\iff$ $a-2b+d-\frac{10}{6}(2a-3b+c) = 0 \quad | \cdot 6$

$6a-12b+6d-10(2a-3b+c)=0$

$-14a+18b-10c+6d=0 \quad | : -2$

$\underline{b}$ lin. komb. av $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\} \iff \boxed{7a-9b+5c-3d=0}$

Tilfellet $(a,b,c,d) = (0,0,1,1)$: $\quad 2=0 \Rightarrow$ dette er ikke lin. komb.

10. Gevinst:

	A	B	C	
1	20	5	30	R_1
2	40	−50	180	R_2
3	−20	25	−265	R_3

a) Budsjettbetingelse:

$$60x + 75y + 320z = 400' \qquad C = 400.000$$

b)

$$\boxed{\begin{aligned} 20x + 5y + 30z &= R_1 \\ 40x - 50y + 180z &= R_2 \\ -20x + 25y - 265z &= R_3 \\ 60x + 75y + 320z &= C \end{aligned}}$$

$(R_1 = 50',\ R_2 = 25',\ R_3 = -100')$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 5 & 30 & R_1 \\ 40 & -50 & +180 & R_2 \\ -20 & 25 & -265 & R_3 \\ 60 & 75 & 320 & C \end{array}\right) \quad -2,\ 1,\ -3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 5 & 30 & R_1 \\ 0 & -60 & 120 & R_2 - 2R_1 \\ 0 & 30 & -235 & R_3 + R_1 \\ 0 & 60 & 230 & C - 3R_1 \end{array}\right) \quad 1/2,\ 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 5 & 30 & R_1 \\ 0 & -60 & 120 & R_2 - 2R_1 \\ 0 & 0 & -175 & R_3 + R_1 + \frac{1}{2}R_2 - R_1 \\ 0 & 0 & 350 & C - 3R_1 + R_2 - 2R_1 \end{array}\right) \quad 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|l} 20 & 5 & 30 & R_1 \\ 0 & -60 & 120 & R_2 - 2R_1 \\ 0 & 0 & -175 & R_3 + \frac{1}{2}R_2 \\ 0 & 0 & 0 & C - 5R_1 + R_2 + 2R_3 + R_2 \end{array}\right)$$

Konsistent $\iff$ $C - 5R_1 + 2R_2 + 2R_3 = 0$
(har løsn)

$$\boxed{C = 5R_1 - 2R_2 - 2R_3}$$

b) $5 \cdot 50' - 2 \cdot 25' - 2 \cdot (-100') = 250' - 50' + 200' = \underline{400'}$
ok, det er mulig.
$\Downarrow$
Portefølje: Løs for (x, y, z).

c) $R_1 > 0,\ R_2 = R_3 = 0$: $400' = 5R_1 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0$
$\underline{R_1 = 80'} > 0$

Portefølje: Løs for (x, y, z)

d) Mulige porteføljeavkastninger:
(R_1, R_2, R_3) slik at $\underline{400' = 5R_1 - 2R_2 - 2R_3}$

$\underline{R_1, R_2, R_3 > 0}$: Ja, det er mulig.

$R_1 = R_2 = R_3$: $400' = 5R_1 - 2R_1 - 2R_1 = R_1$
dvs $R_1 = R_2 = R_3 = \underline{\underline{400'}}$

① Matriser og matriselikninger

Operasjoner på matriser:

i) **Addisjon:** $A+B$ definert når A, B har samme størrelse

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+(-1) \\ 3+2 & 4+7 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}}}$

Subtraksjon: på samme måte

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}}$$

ii) **Skalarmultiplikasjon:** $c \cdot A = A \cdot c$ c: et tall, A: en matrise

Eks: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}}$

iii) **Matrisemultiplikasjon:** $\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B}$

Definert når

$$\boxed{\#\text{kolonner i } A = \#\text{rader i } B}$$

Eks: $\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \\ 7\cdot 3 + (-1)\cdot 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 \\ 19 \end{pmatrix}}}$

Lineære systemer:

Eks.

$$\boxed{\begin{aligned} x + y + z + w &= 3 \\ 2x - y + z &= 7 \\ 3x + y - z + 2w &= 10 \end{aligned}}$$

Lineært system på matriseform:

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

3×4

$$A \cdot \underline{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{3\times 4} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}}_{4\times 1} = \begin{pmatrix} 1\cdot x + 1\cdot y + 1\cdot z + 1\cdot w \\ 2x + (-1)y + 1\cdot z + 0\cdot w \\ 3x + 1\cdot y + (-1)z + 2\cdot w \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} x + y + z + w \\ 2x - y + z \\ 3x + y - z + 2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \underline{b}$$

$$\boxed{A \cdot \underline{x} = \underline{b}}$$

Eks:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + (-1)\cdot 0 & * & * \\ 3\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$2\times 3 \qquad 3\times 3 \qquad 2\times 3$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}}}$$

Merk: $A\cdot B \neq B\cdot A$

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ikke definert

$3\times 3 \qquad 2\times 3$

Potenser: (definert hvis A er ~~kvadratisk~~) $n\times n$-matrise, kvadratisk)

$$A^2 = A\cdot A$$

$$A^3 = A\cdot A\cdot A$$

② Inverse matriser

A^{-1}: den inverse matrisen til A

hvis den finnes, vil $A \cdot A^{-1}$ kansellere

Identitetsmatrisen I:

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Motivasjon:

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

"$\underline{x} = \frac{\underline{b}}{A}$"

$\cdot \frac{1}{3} \mid 3x = 36$

$\cancel{3}x \cdot \cancel{\frac{1}{3}} = 36 \cdot \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = 3^{-1}$

$x = 12$

For enhver matrise A, har vi at

$$A \cdot I = A \quad \text{og} \quad I \cdot A = A$$

Eks:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A}$$

Defn: La A være en $n \times n$-matrise. En invers matrise A^{-1} er en matrise slik at

$$A^{-1} \cdot A = I \quad \text{og} \quad A \cdot A^{-1} = I$$

Fakta:
i) A^{-1} fins $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
ii) En matrise A med $|A| \neq 0$ har entydig A^{-1}

Hvordan finne A^{-1}?

$\underline{n=2}$:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$|A| = ad - bc$

$\underline{ad-bc=0}$:

A^{-1} finnes ikke

$\underline{ad-bc \neq 0}$:

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Eks:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$|A| = 0 - (-3) = \underline{3} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}}}$

$\left.\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} A \cdot A^{-1} = I$

$\left.\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} A^{-1} \cdot A = I$

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

$A^{-1} \cdot A\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

$I \cdot \underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

$n \geq 3$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$|A|$

$|A| = 0$: A^{-1} fins ikke

$|A| \neq 0$: $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A)}$

(adjungert matrise)

$$\text{adj}(A) = C^T$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

kofaktormatrisen

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Transponering:

$A \longrightarrow A^T$ den transponerte matrisen til A

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$