## Plan

1. Determinanter og lineære systemer
2. Lineære systemer med parametre
3. Vektor- og matriselikninger

**Repetisjon:**

a) Lineære system og Gauss-eliminasjon

* pivot-posisjonene = posisjonene i matrisen med pivot i trappeform

* pivot-posisjonene avgjør antall løsninger

a) inkonsistent (ingen løsninger): pivot-pos. i siste kolonne

b) Konsistent (minst én løsn):
antall frihetsgrader = antall frie variabler = variabler uten pivotpos. i ein kolonne

ingen frihetsgrad: én løsning

minst én frihetsgrader: uendelig mange løsninger

## b) Determinanter:

**n = 2:**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

**n = 3:** Kofaktorutvidelse (langs en rad eller en kolonne)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

(kofaktorutvidelse langs første rad)

**n ≥ 4:** Vi kan bruke kofaktorutvidelse

Merk: Kofaktorutvidelse langs enhver rad eller kolonne gir $|A|$.

## Oppgaveark 22:

**6.** a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\left(-1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) + 1\left(-1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 1(-1) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = \underline{\underline{4}}$$

## 1 Determinanter og lineære systemer

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = E \qquad |A| = |E| = \underline{\underline{4}}$$

trappeform

$$|E| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-2) = \underline{\underline{4}}$$

**Resultat:** Hvis $E$ er en kvadratisk matrise på trappeform, er $|E|$ produktet av elementene på diagonalen.

**Resultat:** Hvis $A \to B$ er en elementær radoperasjon, har vi:

i) $|B| = -|A|$ hvis vi bytter om to rader

ii) $|B| = c \cdot |A|$ hvis vi multipliserer en rad med $c \neq 0$

iii) $|B| = |A|$ hvis vi legger til et multippel av en rad til en annen rad.

Ny metode for å regne ut determinanter:

1) Gjør elementære radoperasjoner for å forenkle matrisen (for eksempel en trappeform)

$$A \to \dots \to E$$

2) Finn $|A|$ vha. $|E|$.

Eks: 6b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \;-3 \quad = \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \;\tfrac{1}{2}$$

Alt a):

$$1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 5 = \underline{\underline{-10}}$$

Alt b):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot \cancel{2} \cdot (5/\cancel{2}) = \underline{\underline{-10}}$$

Alt c):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \;2 \; = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 5 = \underline{\underline{-10}}$$

# Determinanter og lineære systemer

**Spesialtilfelle:**

$n \times n$ lineære system

(kvadratisk, antall likninger = antall ukjente)

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

koeffisientmatrisen

$n \times n$-matrise

$|A|$

**Resultat:**

Kvadratisk $(n \times n)$ lineært system:

$|A| \neq 0$ : én løsning

$|A| = 0$ : ingen eller uendelig mange løsninger

**Eks:**

$$\begin{aligned} x + y + z &= 27 \\ x + 2y + 4z &= -18 \\ x + 3y + 9z &= 37 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 2 \neq 0$$

én løsning.

**Eks:**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$|A| = 10 \neq 0$ én løsn. $\qquad |A| = 0$ ingen løsn $\qquad |A| = 0$ uendelig mange.

## ② Lineære system med parametre

Eks:

$$x + y = 4$$
$$x + ay = 6$$

$x, y$: variable
$a$: parameter

Vi skal finne løsningen $(x, y)$ for hver verdi av $a$.

Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & a & 6 \end{array}\right) \rfloor -1$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & a-1 & 2 \end{array}\right)$$

$a \neq 1$: $\begin{cases} x + y = 4 \\ (a-1)y = 2 \end{cases}$ $\quad x = 4 - \frac{2}{a-1}$, $\quad y = \frac{2}{a-1}$

$a = 1$: $\quad x + y = 4$, $\quad 0 = 2$ $\quad$ ingen løsning

Løsning:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (x,y) = \left(\frac{4a-6}{a-1}, \frac{2}{a-1}\right) & \text{hvis } a \neq 1 \\ \text{Ingen løsn.} & \text{hvis } a = 1 \end{array}}$$

← én løsn.

Eks:

$$ax + y = 2$$
$$x - ay = 5$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 2 \\ 1 & -a & 5 \end{array}\right)$$

$a = 0$:

$a \neq 0$:

vanskelig å løse uten Gauss

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \qquad |A| = -a^2 - 1$$

$|A| = 0$: $-a^2 - 1 = 0$

$a^2 = -1$

ingen løsn.

$$\Downarrow$$

$|A| \neq 0$ for alle $a$

→ én løsning for alle verdier av $a$.

Eks:
$$ax + y = 4$$
$$x + ay = 2$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & +a \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

$|A| = 0$: $a^2 - 1 = 0$, $a = \pm 1$ $\longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} a \neq \pm 1: \text{én løsn.} \\ a = \pm 1: \text{ingen eller uendelig mange løsn.} \end{array}}$

$a = \pm 1$:

$a = 1$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ ingen løsn.

$a = -1$: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$ ingen løsn.

Generelt: Når $|A| = 0$, så løser vi systemet vha Gauss-eliminasjon for hvert tilfelle (for hver $a$-verdi som gir $|A| = 0$).

Eks: $\quad ax + y = 4$ $\quad$ når $a \neq \pm 1$
$\quad x + ay = 2$ $\quad (|A| \neq 0)$

Alt I: Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 4 \\ 1 & a & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ a & 1 & 4 \end{array}\right) \cdot(-a)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ 0 & 1-a^2 & 4-2a \end{array}\right) \qquad 1-a^2 \neq 0$$

$$x + ay = 2$$
$$(1-a^2)y = 4-2a$$

$$y = \frac{4-2a}{1-a^2} \quad \text{ok.}$$

$$x = 2 - ay = 2 - a \cdot \frac{4-2a}{1-a^2} = \frac{2(1-a^2) - a(4-2a)}{1-a^2} = \frac{2-4a}{1-a^2} \quad \text{ok}$$

$$\boxed{(x,y) = \left(\frac{2-4a}{1-a^2}, \frac{4-2a}{1-a^2}\right) \quad \text{når } a \neq \pm 1}$$

Kramer's regel: $\left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 4 \\ 1 & a & 2 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

$$|A_x(\underline{b})| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 4a - 2 \qquad x = \frac{|A_x(\underline{b})|}{|A|} = \frac{4a-2}{a^2-1}$$

$$|A_y(\underline{b})| = \begin{vmatrix} a & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 4 \qquad y = \frac{|A_y(\underline{b})|}{|A|} = \frac{2a-4}{a^2-1}$$

## Kramers regel:

Et $n \times n$ (kvadratisk) lineært system, med $A$ som koeffisientmatrise og $(A|\underline{b})$ som utvidet matrise, har vi:

$$|A| \neq 0 \Rightarrow \text{én løsning} \quad \begin{cases} x_1 = |A_1(\underline{b})| / |A| \\ x_2 = |A_2(\underline{b})| / |A| \\ \vdots \\ x_n = |A_n(\underline{b})| / |A| \end{cases}$$

der $A_i(\underline{b})$ er matrisen vi får når vi bytter ut kolonne $i$ fra $A$ med $\underline{b}$

## Oppsummering:

Vi starter med et $n \times n$ (kvadratisk) lineært system med parametre.

1. Finn $|A|$, løs $|A| = 0$
2. For $a$ slik at $|A| = 0$: "unntakstilfeller"
   Løs v.h.a Gauss for hver $a$-verdi med $|A| = 0$.
3. For $a$ slik at $|A| \neq 0$: én løsning
   TO alternativer:
   - Kramers regel
   - Gauss med parametre (forsiktig!)

Eks:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ x+ay+4z &= 7 \\ x+3y+az &= a \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & a & 4 & 7 \\ 1 & 3 & a & a \end{array}\right)$$

1) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 4 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = 1\cdot(a^2-12) - 1(a-4) + 1(3-a)$

$= a^2 - 12 - a + 4 + 3 - a$

$= \underline{a^2 - 2a - 5}$

$\underline{|A|=0}$: $a^2-2a-5=0$

$a = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+20}}{2} = \underline{1 \pm \sqrt{6}}$

2) $a = 1+\sqrt{6}$ (6 ans)

$a = 1-\sqrt{6}$ (6 ans)

3) $a \neq 1 \pm \sqrt{6} \Rightarrow$ Kramers regel

$\underline{\text{Én løsning}}$

$|A| = a^2-2a-5$

$|A_x(\underline{b})| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & a & 4 \\ a & 3 & a \end{vmatrix} = 3\cdot(a^2-12) - 1\cdot 3a + 1\cdot(21-a^2)$

$= 3a^2 - 36 - 3a + 21 - a^2$

$= \underline{2a^2 - 3a - 15}$

$x = \dfrac{|A_x(\underline{b})|}{|A|} = \underline{\underline{\dfrac{2a^2-3a-15}{a^2-2a-5}}}$ $\qquad y = \ldots \qquad z = \ldots$

## 3 Vektor- og matriselikninger

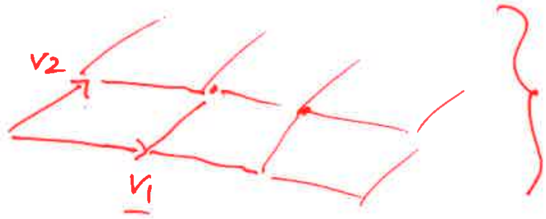
Anta at $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ er 3-vektorer.

Eks: $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Lineærkombinasjoner:

Lineærkombinasjoner av $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ : $c_1 \underline{u}_1 + c_2 \cdot \underline{u}_2 + c_3 \cdot \underline{u}_3$
($c_1, c_2, c_3$ er gitte tall)

Eks:
$$2\underline{u}_1 + 1 \cdot \underline{u}_2 - 1 \cdot \underline{u}_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}}$$




lineærkombinasjoner av $\underline{u}_1$ og $\underline{u}_2$
$= c_1 \cdot \underline{u}_1 + c_2 \underline{u}_2$

Eks: Er $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$?

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$ vektor-likning

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 7 \\ 3x_1 - x_2 &= 4 \end{aligned}$$

vektorlikning = lineært system

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{-3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -13 & -17 \end{array}\right)$$

$x_1 + 4x_2 = 7$

$-13x_2 = -17$

$$x_2 = \frac{-17}{-13} = 17/13$$

$$x_1 = 7 - 4 \cdot (17/13)$$

$$= \frac{7 \cdot 13 - 4 \cdot 17}{13} = \frac{91 - 68}{13} = \frac{23}{13}$$

$$(x_1, x_2) = (23/13, 17/13) \rightarrow \frac{23}{13} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{17}{13} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(ja)