Plan

1 Lineære system og Gauss-eliminasjon

Lineære system:

Et $m \times n$ lineært system:

$$m\left\{\begin{array}{l} \underbrace{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}}_{n \text{ variabler}} \end{array}\right.$$

Gauss-eliminasjon:

Metode for å løse lineære systemer (generell metode)

1. Skriv ned den utvidede matrisen til det lineære systemet.
2. Bruk elementære radoperasjoner til vi har en trappeform
3. Skriv ned det lineære systemet til trappeformen, og løs det ved hjelp av baklengs substitusjon.

$$\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ x+2y+4z&=7 \\ x+3y+9z&=13 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ ]\,-1 \\ ]\,-1 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ ]\,-2 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

trappeform

$$\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ y+3z&=4 \\ 2z&=2 \end{aligned}$$

$2z=2 \Rightarrow z=1$

$y+3z=4 \Rightarrow y=4-3\cdot 1$

$y=1$

$x+y+z=3 \Rightarrow x=3-y-z=3-1-1$

$x=1$

Løsning: $(x,y,z)=(1,1,1)$

Viktige egenskaper ved Gauss-eliminasjon:

Pivot-posisjon: Posisjonene i matrisen som har pivot i trappeform.

Merk:

i) En trappeform er ikke entydig, men pivot-posisjonene er entydige.

ii) Antall løsninger er bestemt av pivotposisjonene:

Eks:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow$$

a) Ingen løsning: pivot-posisjon i siste kolonne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

b) Én løsning: (eksakt én løsning) pivot-posisjon i alle variabel-kolonner (men ikke siste kolonne)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

c) Uendelig mange løsninger: minst én variabel-kolonne har ikke pivotposisjon (men ikke pivot-posisjon i siste kolonne)

x, y : avhengige
z : fri

I tilfelle c): Alle variabler som svarer til kolonner uten pivot-posisjon er frie variabler. Alle andre kalles avhengige variabler.

Antall frihetsgrader = antall frie variabler

Inkonsistent:	ingen løsninger
Konsistent:	én løsn. eller uendelig mange løsn.

Oppgaveark 21:

7.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 11 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1 \\ -1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 10 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

trappeform

uendelig mange løsninger (w er fri)

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 10 \\ y + 3z - 2w &= -3 \\ 6z + 6w &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{6z}{6} = -\frac{6w}{6} \Rightarrow z = -w$

$y = -3 - 3z + 2w$
$= -3 - 3(-w) + 2w$
$y = -3 + 5w$

$x = 10 - y - z - w$
$= 10 - (-3 + 5w) - (-w) - w$
$x = 13 - 5w$

Løsninger:

$(x, y, z, w) = (13 - 5w, -3 + 5w, -w, w)$

der w er fri

$(13, -3, 0, 0) + w \cdot (-5, 5, -1, 1)$

1a) $x^2 - y^2 = 8$
$xy = 3$ $\rightarrow$ $y = 3/x$

$x^2 - (3/x)^2 = 8$

$x^2 - 9/x^2 = 8 \quad | \cdot x^2$

$x^4 - 9 = 8x^2$

$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

$\underline{u = x^2}$: $u^2 - 8u - 9 = 0$

$u = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \dfrac{8 \pm 10}{2}$

$u = 9$ eller $u = -1$

$x^2 = 9$ $\quad$ $\cancel{x^2 = -1}$

$\underline{x = \pm 3}$

$\underline{x = 3}$: $y = 1$ $\rightarrow$ $(x,y) = \underline{(3,1)}$

$\underline{x = -3}$: $y = -1$ $\quad$ $(x,y) = \underline{(-3,-1)}$

$\underline{9.}$ ① $2xy + y^3 + y^2 = 0$
② $x^2 + 3xy^2 + 2xy = 0$

① $y(2x + y^2 + y) = 0$
$\boxed{y = 0 \text{ eller } 2x + y^2 + y = 0}$

② $x \cdot (x + 3y^2 + 2y) = 0$
$\boxed{x = 0 \text{ eller } x + 3y^2 + 2y = 0}$

a) $y = 0$, $x = 0$ $\rightarrow$ $(x,y) = \underline{(0,0)}$

b) $y = 0$, $x + 3y^2 + 2y = 0$:
$\underline{x = 0} \rightarrow (x,y) = \underline{(0,0)}$

c) $2x + y^2 + y = 0$, $x = 0$:
$y^2 + y = 0$
$y(y+1) = 0$
$y = 0$, $y = -1$ $\rightarrow$ $(x,y) = \underline{(0,0)}$, $\underline{(0,-1)}$

d) $\underline{2x + y^2 + y = 0,\ x + 3y^2 + 2y = 0}$:
$x = -3y^2 - 2y$
$2(-3y^2 - 2y) + y^2 + y = 0$
$-6y^2 - 4y + y^2 + y = 0$
$-5y^2 - 3y = 0$
$-y(5y+3) = 0$ $\quad$ $\underline{y = 0}$, $y = \underline{-3/5}$

d) fortsatt: $x = -3y^2 - 2y$

$y = 0$ eller $y = -3/5$

$\downarrow$

$x = 0$

$\underline{(0,0)}$

$x = -3\cdot(-3/5)^2 - 2\cdot(-3/5)$

$= \frac{-27}{25} + \frac{6\cdot 5}{5\cdot 5} = \underline{3/25}$

$\downarrow$

$(x,y) = \underline{(3/25, -3/5)}$

Løsninger: $(x,y) = (0,0), (0,-1), (3/25, -3/5)$

(2) Matriser og vektorer.

Defn: En $m\times n$-matrise er en rektangulær tabell som består av m rader, n kolonner. Tallet i rad i og kolonne j: a_{ij} i posisjon (i,j)

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $a_{11} = 1$ $a_{12} = 2$ $a_{21} = 3$ $a_{22} = -1$

2×2-matrise

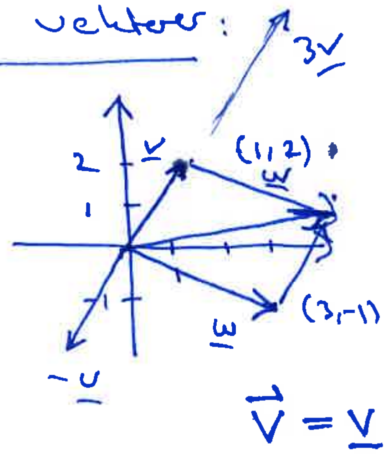
Defn: En $m\times n$-matrise A er kvadratisk hvis $m = n$, # rader = # kolonner.

Defn: En vektor (n-vektor) er en matrise med én kolonne (og n rader).

Eks: $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

2-vektor 3-vektor

Geometrisk representasjon av vektorer:



$n=2$: $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Operasjoner:

Addisjon: $\underline{v} + \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+(-1) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Skalarmultiplikasjon: skalar = tall

$$3 \cdot \underline{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}}}$$

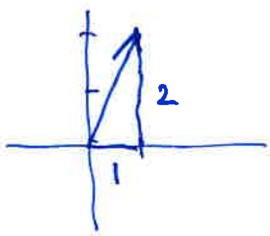
$$-1 \cdot \underline{u} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lengden til en vektor

$\|\underline{u}\|$ = lengden til vektoren u

Eks: $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \|\underline{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2}$

$$= \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$



$$\|u\| = \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

③ Determinant

A ($n \times n$-matrise (kvadratisk)) $\rightsquigarrow$ $\det(A) = |A|$ determinanten til A (et tall)

$n=2$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\boxed{|A| = ad - bc}$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $|A| = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = \underline{\underline{1}}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ $|A| = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = \underline{\underline{-1}}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 7 \cdot 1$

$= -6 - 7 = \underline{\underline{-13}}$

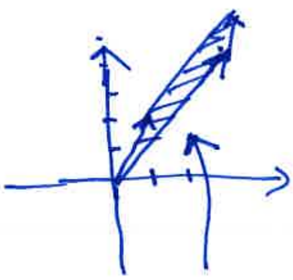
Tolkning:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$

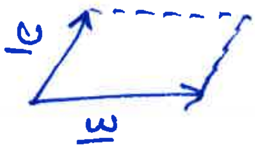
$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\|\underline{v_1}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\|\underline{v_2}\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$



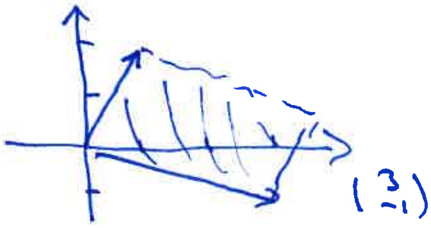
det(A) = ±areal av parallellogramet utspent av kolonnene i matrisen



parallellogram utspent av $\underline{u}$, $\underline{w}$

Eks:

$\begin{vmatrix}1&3\\2&-1\end{vmatrix} = -1-6=-7$

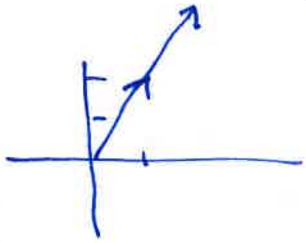


$\begin{vmatrix}3&1\\-1&2\end{vmatrix} = 6-(-1)=\underline{7}$

Areal = 7

(fortegn = høyrehånds-regel)

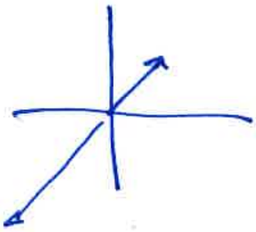
$\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix} = 4-4=0$



$\boxed{|A|=0 \iff \text{vektor } \underline{v_1} \text{ og } \underline{v_2} \text{ (kolonnene i A) ligger langs samme rette linje}}$

$\begin{vmatrix}2&-4\\3&-6\end{vmatrix}$

$= -12-(-12)=\underline{0}$

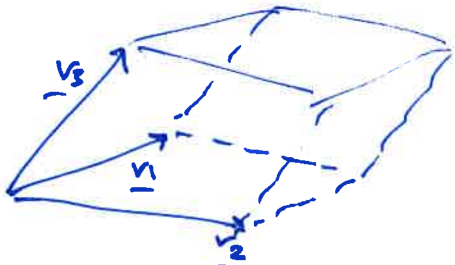


$\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix} = -2\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$\underline{n=3:}$

$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$

$\underline{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad \underline{v_2}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\quad \underline{v_3}=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}$



parallepiped

$|A| = \pm$ volumet til parallellepiped

Kofaktor utvidelse:

Eks.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Velger kofaktor utvidelse langs første rad:

$$|A| = 1 \cdot C_{11} + 1 \cdot C_{12} + 1 \cdot C_{13}$$
$$= +1 \cdot M_{11} - 1 \cdot M_{12} + 1 \cdot M_{13}$$
$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (18 - 12) - 1(9-4) + 1(3-2)$$
$$= 6 - 5 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

Fortegn tal:

C_{11} : $(-1)^{1+1} = (-1)^2 = +1$

C_{12} : $(-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1$

C_{13} : $(-1)^{1+3} = (-1)^4 = +1$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Minor tal:

M_{11} : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

M_{12} : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

M_{13} : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Eks: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ Kofaktorutvidelse langs 3. kolonne

$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(3-2) - 4(3-1) + 9 \cdot (2-1)$$

$$= 1 - 8 + 9 = \underline{\underline{2}}$$

- Kofaktorutvidelse kan brukes til å regne ut $\det(A) = |A|$ for alle $n \times n$-matriser $(n \geq 2)$.
- Kofaktorutvidelse langs alle rader og kolonner gir samme svar, $|A|$.

Defn: Defn. av 3×3-determinant ved formel

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$