Plan

Intro:

Emner
- A Integrasjon
- B Matriser og vektorer
- C Funksjoner i to variabler

Foreles.: Tors 11–14
Veiledning: Tor 14–16

Kontortid: B4-032
Tors 09–11

Eksamensresultat

Flervalgseksamen i MET1180 Matematikk 11/12/2019

Oppsummering

Andel A-B	15.9%
Andel F	19.2%
Gjennomsnitt	16.9p (D)

Kommentarer

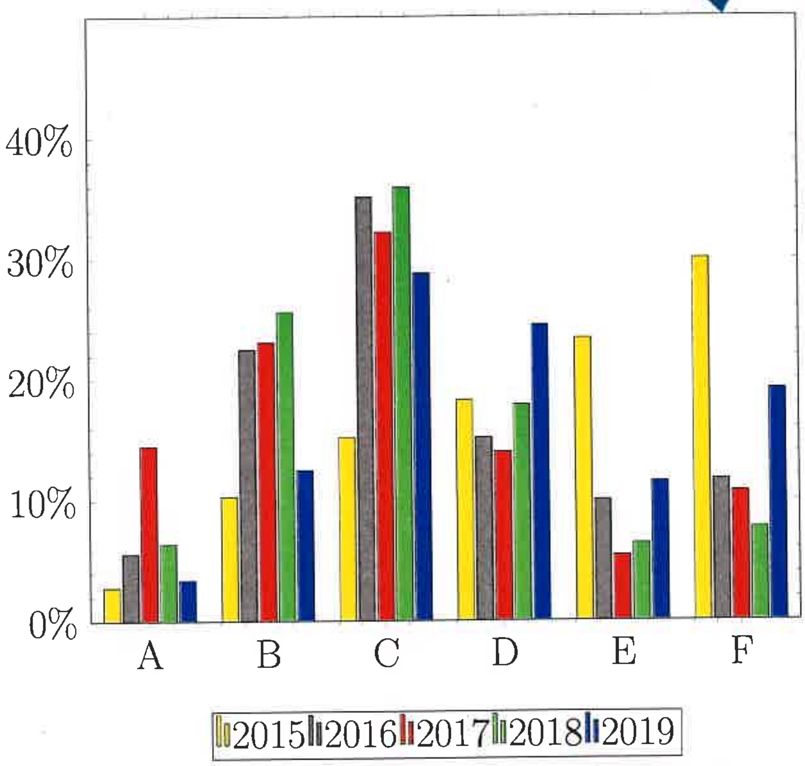
Oppsummering av score per oppgave er gitt i tabellen nedenfor. Oppgave 5 og 8 hadde stor andel gale svar. Oppgave 9-10, 12-13 og 15 hadde lav svarprosent.

Gjennomsnitt per oppgave

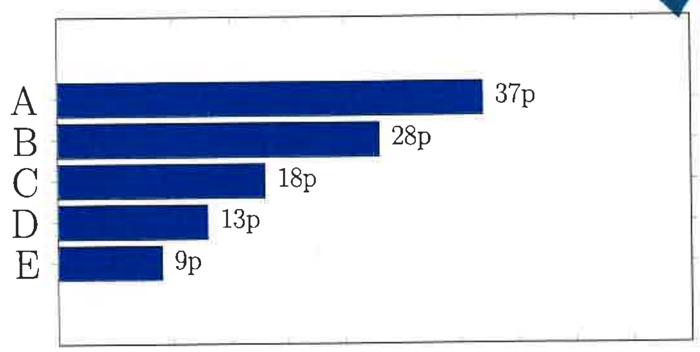
	Riktig S.	Galt S.	Ubesv.
Score:	3p	-1p	0p
Oppgave 1:	89%	9%	2%
Oppgave 2:	77%	20%	3%
Oppgave 3:	64%	23%	14%
Oppgave 4:	64%	27%	10%
Oppgave 5:	29%	47%	24%
Oppgave 6:	66%	31%	2%
Oppgave 7:	59%	35%	6%
Oppgave 8:	29%	41%	30%
Oppgave 9:	31%	29%	40%
Oppgave 10:	33%	13%	54%
Oppgave 11:	54%	21%	26%
Oppgave 12:	26%	33%	42%
Oppgave 13:	38%	21%	41%
Oppgave 14:	32%	30%	39%
Oppgave 15:	5%	11%	84%

Detaljerte løsninger til alle oppgaver finnes på www.dr-eriksen.no.

Karakterfordeling siste 5 år



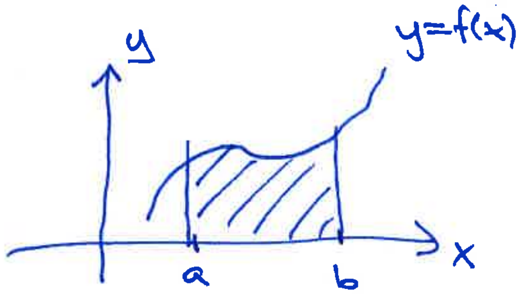
Karakterskala



① Intro til integrasjon og bestemte integral

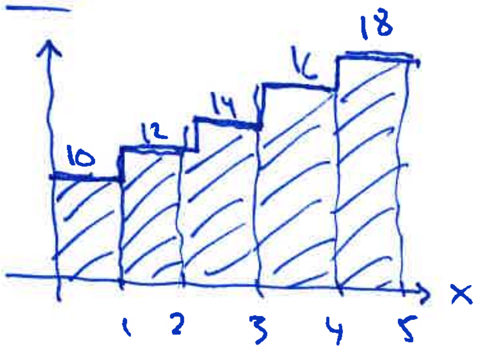
Defn:

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{bestemt integral}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{arealet under} \\ \text{grafen til } f \\ \text{i intervallet} \\ [a,b] \end{array} \right\}$$



- f er kont. i $[a,b]$
- $f(x) \geq 0$ i $[a,b]$

Eks:



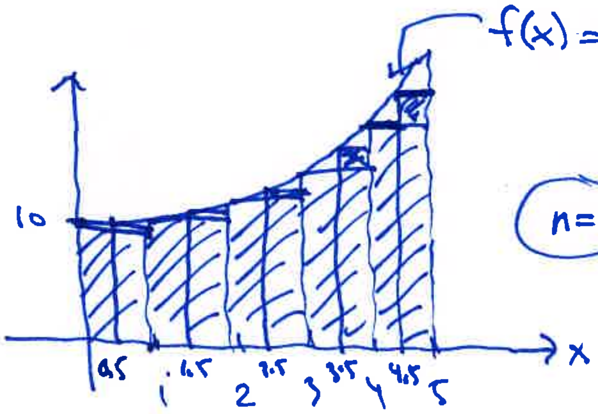
Samlet kvantum:

$$10+12+14+16+18 = \frac{10+18}{2}\cdot 5 = \underline{\underline{70}}$$

(areal under en graf

$10\cdot 1 + 12\cdot 1 + 14\cdot 1 + 16\cdot 1 + 18\cdot 1$

$f(x) = 10\cdot e^{0.2x}$



Tilnærming:

n=5

$$\underbrace{10\cdot 1}_{f(0)} + \underbrace{10e^{0.2}}_{f(1)}\cdot 1 + 10e^{0.4}\cdot 1 + 10e^{0.6}\cdot 1 + 10e^{0.8}\cdot 1$$

$$= 10 + 10e^{0.2} + 10e^{0.4} + 10e^{0.6} + 10e^{0.8}$$

$$= 10\cdot\frac{e-1}{e^{0.2}-1} \simeq \underline{77.6}$$

n=10

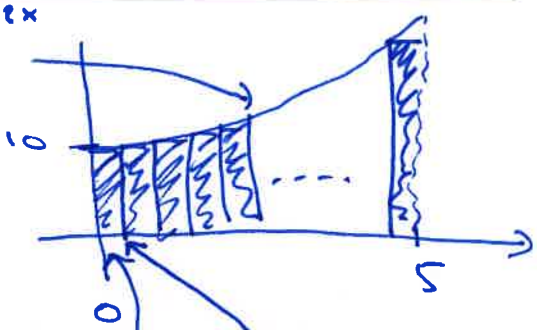
$$10\cdot\tfrac{1}{2} + 10e^{0.1}\cdot\tfrac{1}{2} + 10e^{0.2}\cdot\tfrac{1}{2} + \ldots + 10e^{0.9}\cdot\tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(10 + 10e^{0.1} + \ldots + 10e^{0.9}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{e-1}{e^{0.1}-1} \simeq \underline{81.7}$$

Areal:

$f(x) = 10e^{0.2x}$



n delintervaller:

$$\underbrace{10\cdot\frac{5}{n} + 10e^{1/n}\cdot\frac{5}{n} + 10e^{2/n}\cdot\frac{5}{n} + \dots + 10e^{(n-1)/n}\cdot\frac{5}{n}}_{\text{Riemann-sum}}$$

$x_1 = 0 + 5/n = 5/n$

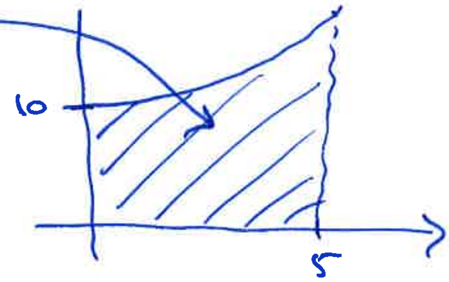
bredde:

$$\frac{5-0}{n} = \frac{5}{n}$$

Resultat:

$$\int_0^5 10e^{0.2x}\,dx = \text{areal}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{10\cdot\frac{5}{n} + 10e^{1/n}\cdot\frac{5}{n} + \dots + 10e^{\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{5}{n}}_{\text{Riemann-sum}}\right)$$



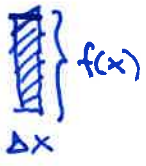
Skrivemåte:

$$\int_0^5 \underline{10e^{0.2x}}\,dx = \int_a^b \underline{f(x)}\,dx$$

$\int$: integrasjonssymbolet ($\int$ = sum)

$f(x)$: funksjonen vi skal integrere (integrand)

dx :



Men $(G(x) - F(x))' = 0$ betyr at $G(x) - F(x) = C$

$G(x) = F(x) + C$

$\boxed{\text{Altså: Den generelle antiderivert til } f(x) \text{ er } F(x)+C \text{ hvis } F'(x) = f(x).}$

Defn: Ubestemt integral: $\int f(x)\,dx = \left\{\begin{matrix}\text{den generelle} \\ \text{antiderivert} \\ \text{til } f(x)\end{matrix}\right\}$

Hvis $F(x)$ er en antiderivert, dvs $F'(x) = f(x)$

$= F(x) + C$

↑ integrasjons-konstanten

Ex: $\int 2x\,dx = x^2 + C$

③ Integrasjonsregler

Ex: $(x^n)' = nx^{n-1}$

potens regelen for derivasjon

$\int nx^{n-1}\,dx = x^n + C$

$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

① Potensregelen: $\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad \text{for } n \neq -1}$

$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = \frac{1}{\cancel{n+1}} \cdot \cancel{(n+1)}\, x^n = x^n$ ok

Ex: $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2} dx = \frac{1}{3/2}x^{3/2} + C$

$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2} dx = \frac{1}{-1}x^{-1} + C$

$= -\frac{1}{x} + C$

$= \frac{2}{3} \cdot x\sqrt{x} + C$

2 Antiderivasjon og ubestemte integral

Defn: En antiderivert til en funksjon $f(x)$ er en funksjon $F(x)$ slik at $F'(x) = f(x)$.

Eks: $f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2$ er en antiderivert til $f(x) = 2x$, siden
$$(x^2)' = 2x$$

$F(x) = x^2+1$ er en atiderivert for $f(x) = 2x$

$F(x) = x^2 + C$, der C er en konstant, er en antiderivert til $f(x) = 2x$.

Defn:
Den generelle antideriverte til $f(x)$ er et uttrykk som inneholder alle antideriverte til $f(x)$

Resultat: Den generelle antideriverte til $f(x)$ er $F(x) + C$, der $F(x)$ er en antiderivert.

...

Forklaring: $F(x)$ antiderivert for $f(x) \rightarrow F'(x) = f(x)$

Da har vi:

i) $(F(x)+C)' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$

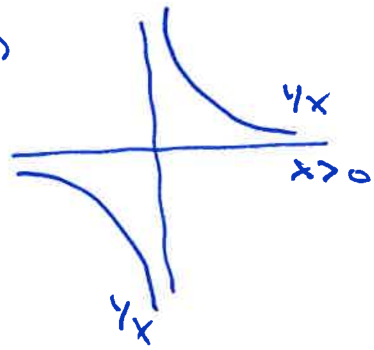
$\Rightarrow F(x)+C$ er en antiderivert for alle C

ii) Anta $G(x)$ er en antiderivert til $f(x)$, dvs $G'(x) = f(x)$.

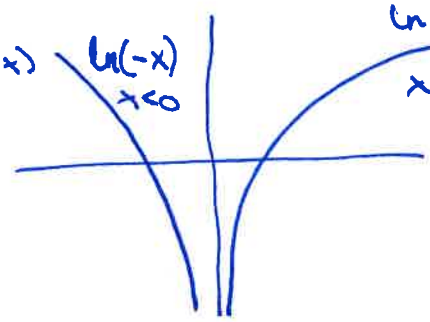
Se på $G(x) - F(x)$: $(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$

(2) $\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C}$ ← Forklaring: Absoluttverdi

$f(x)$ $F(x)$



$$\ln(-x)' = \frac{1}{(-x)}\cdot(-1) = 1/x$$



$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x>0 \\ \ln(-x), & x<0 \end{cases}$$

(3) $\int u+v\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$ u, v: uttrykk

$\int u-v\,dx = \int u\,dx - \int v\,dx$

(4) $\int c\cdot u\,dx = c\cdot\int u\,dx$ u: uttrykk c: konstant

Ex: $\int x+x^2\,dx = \underline{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C}$

$\int x^2 - x^3\,dx = \underline{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + C}$

$$\int x+3x^2\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 3\int x^2\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + C = \underline{\frac{1}{2}x^2 + x^3 + C}$$

Integrasjonsregler:

1. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$, $n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
3. $\int u \pm v \, dx = \int u \, dx \pm \int v \, dx$
4. $\int c \cdot u \, dx = c \cdot \int u \, dx$
5. $\int e^x dx = e^x + C$

   $\int a^x dx = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + C$ $(a > 0)$

u, v : uttrykk i x
c : konstant

Ex: $\int 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \, dx = \int 1 dx + 2 \cdot \int x dx + 3 \int x^2 dx + 4 \int x^3 dx$

$= x + x^2 + \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} x^3 + \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} x^4 + C$

$= \underline{\underline{x + x^2 + x^3 + x^4 + C}}$

$x + C + 2\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$
$+ 3\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)$
$+ 4\left(\frac{1}{4}x^4 + C\right)$

$= x + x^2 + x^3 + x^4 + C_1 + 2C_2 + 3C_3 + 4C_4$

Avanserte integrasjonsteknikker:

i) Substitusjon ← "kjerneregel"
ii) Delvis integrasjon ← "produktregel"
iii) Delbrøksoppspalting ← integrasjon av rasjonale uttrykk

Ex: $\int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int 1\, dx = \underline{x + C}$

$\cancel{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln|x|}$

Ex: $\int e^{-x}\, dx = \frac{1}{-1} \cdot e^{-x} + C = \underline{\underline{-e^{-x} + C}}$

Sjekk: $\left(\frac{1}{-1} e^{-x}\right)' = \frac{1}{\cancel{(-1)}} \cdot e^{-x} \cdot \cancel{(-1)} = e^{-x}$

$\int e^{2x-1}\, dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot e^{2x-1} + C}}$

$u = 2x - 1$
$u' = 2$

$\int (1-x)^5\, dx = \frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{6}(1-x)^6 + C = \underline{\underline{-\frac{1}{6}(1-x)^6 + C}}$

$u = 1 - x$
$u' = -1$

Substitusjon:

$$\int (1-x)^5 \, dx =$$

$u = 1-x$

$u' = -1$

$\boxed{du = u' dx}$

$du = -1 \cdot dx$

$\boxed{\begin{array}{l} u = 1-x \\ du = -1 \cdot dx \end{array}} \longrightarrow dx = \frac{du}{-1}$

$du = u' \cdot dx$

$$= \int u^5 \cdot \frac{du}{-1} = \int \frac{u^5}{-1} du = \frac{1}{-1} \cdot \int u^5 du = \frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{6} u^6 + C$$

$$= -\frac{1}{6} u^6 + C = -\frac{1}{6}(1-x)^6 + C$$

Eks: $\int x \cdot \sqrt{x^2+1} \, dx = \int x \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{du}{2x}$

$\boxed{\begin{array}{l} u = x^2+1 \\ du = 2x \cdot dx \end{array}} \to dx = \frac{du}{2x}$

$$= \int \cancel{x} \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2\cancel{x}} du = \int \frac{1}{2} \sqrt{u} \, du$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{1/2} du = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3/2} \cdot u^{3/2} \right) + C$$

$$= \frac{1}{3} u^{3/2} + C$$

$$= \frac{1}{3} (x^2+1)^{3/2} + C = \frac{1}{3} (x^2+1) \cdot \sqrt{x^2+1} + C$$