MET 1181, 15. forelesning, 15. nov. 2019, Runar Ile

1. Rep. & oppg.
2. Lineær approksimasjon
3. Kvadratisk approksimasjon
4. Taylorpolynomer

} kap. 4.10

## 1. Rep. & oppg.

**l'Hôpitals regel**: Brukes for grenser $\frac{0}{0}$ og $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Deriverer teller og nevner for seg.
Ser på grensen til nye brøken.

**Oppg 1h** $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1} \overset{l'Hôp}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2\sqrt{1}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}}$

$\frac{0}{0}$

$[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$

$(\sqrt{x}-1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

l'Hôpital kan brukes til å finne horisontale asymptoter:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1} \overset{l'Hôp}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

$\frac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \underline{0}$$

Så linjen $y=0$ er en horisontal asymptote for $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1}$

## Kostnadsfunksjoner

Tre kriterier:

① $K(0) > 0$

② $K(x)$ voksende $(K'(x) \geq 0)$

③ $K(x)$ konveks $(K''(x) \geq 0)$

Enhetskostnaden $A(x) = \dfrac{K(x)}{x}$

Kostnadsoptimum: Minimumspunktet til $A(x)$.

– er løsningen på likningen $A(x) = K'(x)$ hvis $K''(x) > 0$.

Oppg 3d $K(x) = 1000 \cdot e^{\overbrace{0.0004 \cdot (x+5)^2}^{u=u(x)}} = 1000 \cdot e^{u}$

– er en kostnadsfunksjon fordi:

① $1000\, e^{u} > 0$ uansett hva $x$ og $u$ er

② $u'(x) \overset{\text{kjerner.}}{=} 0.0004 \cdot 2 \cdot (x+5) \cdot 1 = 0.0008\,(x+5)$

$g(u) = 1000\, e^{u}$ , $g'(u) = 1000\, e^{u}$

$K'(x) \overset{\text{kjerner.}}{=} g'(u) \cdot u'(x) = 1000\, e^{u} \cdot 0.0008(x+5)$

$> 0$ for $x > -5$

så $K(x)$ er voksende for $x \geq 0$

③ $K'(x) = 0{,}8 \cdot (x+5)\, e^{u}$. Da gir produktregelen

$K''(x) = [0{,}8\,(x+5)]' \cdot e^{u} + 0{,}8(x+5) \cdot (e^{u})'_x$

$$= 0,8 \cdot e^u + 0,8(x+5)(e^u)'_u \cdot u'(x)$$

$$= \underline{0,8}\, e^u + \underline{0,8}(x+5)\, e^u \cdot 0,0008(x+5)$$

$$= 0,8 \cdot (1 + 0,0008 \cdot (x+5)^2)\, e^u > 0$$

for alle $x$

Altså er $K(x)$ en kostnadsfunksjon.

Og <u>kostnadsoptimum</u> er løsningen på likningen $K'(x) = A(x)$

dvs
$$0,8(x+5)e^u = \frac{1000\, e^u}{x} \quad \Big| \cdot x$$

$$0,8x(x+5)e^u = 1000\, e^u \quad \Big| : e^u$$

$$0,8x(x+5) = 1000 \quad \Big| : 0,8$$

$$x^2 + 5x = x(x+5) = \frac{1000}{0,8} = 1250$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = 1250 + (2,5)^2 = 1256,25$$

$(x > 0)$:
$$x + \frac{5}{2} = \sqrt{1256,25}$$

$$x = -\frac{5}{2} + \sqrt{1256,25} = \underline{\underline{32,94}}$$

Minimal enhetskostnad:

$$A(32,94) = K'(32,94) = 0,8(32,94+5)e^{0.0004(32,94+5)^2}$$

$$= \underline{\underline{53,99}}$$

Etterspørselens priselastisitet

$$\varepsilon = \frac{\text{relativ etterspørselsendring}}{\text{relativ prisendring}}$$

Hvis $p$ = pris og $D(p)$ = etterspørsel (salg)

så er $\varepsilon(p) = \frac{D'(p) \cdot p}{D(p)}$

<u>Oppg 7a</u> $D(p) = 100 - 2p \qquad (0 < p < 50)$

Da er $D'(p) = -2$ og

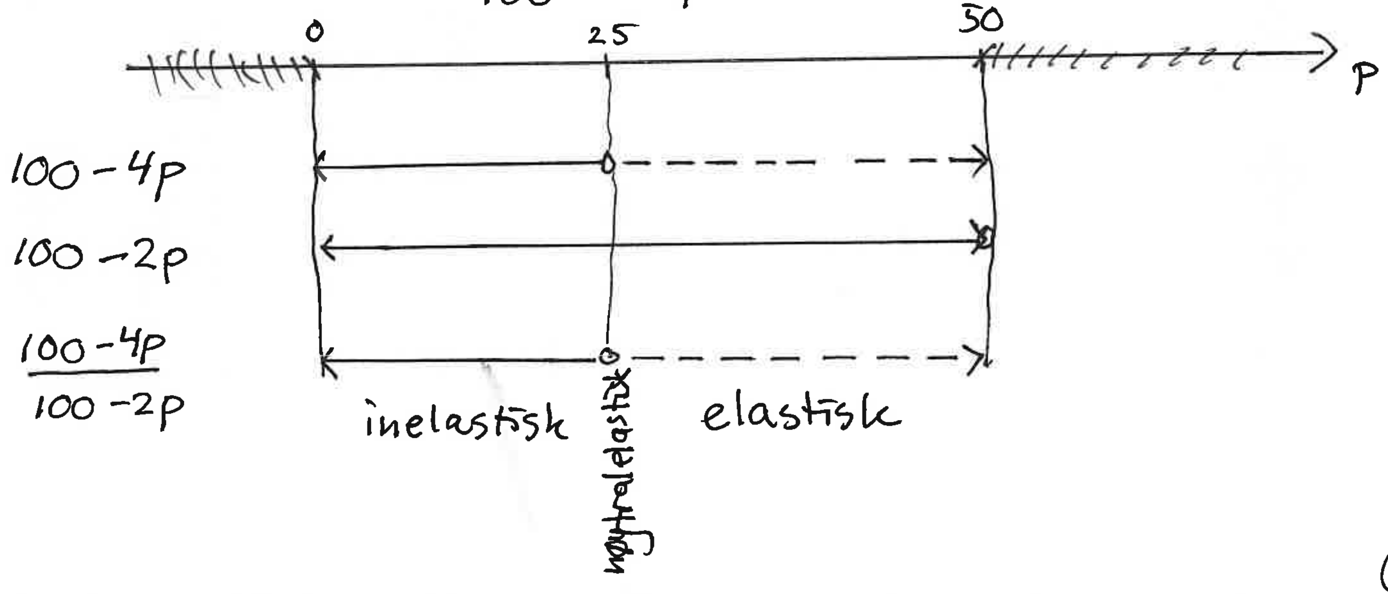
$$\varepsilon(p) = \frac{(-2) \cdot p}{100 - 2p} = \frac{-2p}{100-2p}$$

Elastisk: $\varepsilon(p) < -1$ dvs $\frac{-2p}{100-2p} < -1$

dvs $\frac{-2p}{100-2p} + 1 < 0$

dvs $\frac{-2p + 100 - 2p}{100 - 2p} < 0$

dvs $\frac{100 - 4p}{100 - 2p} < 0$



Elastisk etterspørsel : $25 < p < 50$

Inelastisk —"— : $0 < p < 25$

Nøytralelastisk —"— : $p = 25$

Salgsinntekter: $I(p) = p \cdot D(p)$

$$I'(p) = 1 \cdot D(p) + p \cdot D'(p)$$

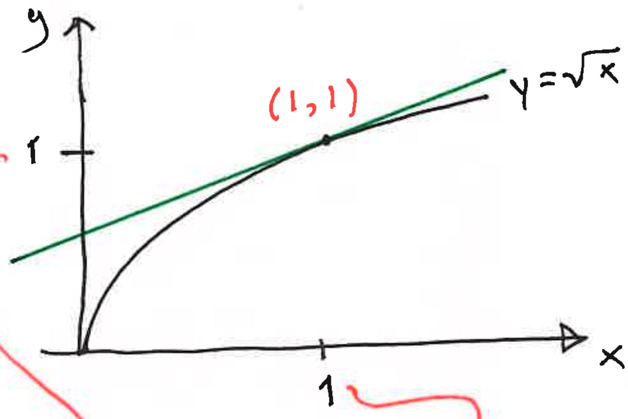
$$= \underbrace{D(p)}_{\text{alltid pos.}} \underbrace{[1 + \varepsilon(p)]}_{\text{pos/neg?}}$$

$I(p)$ voksende hvis $\varepsilon(p) > -1$

$I(p)$ avtagende hvis $\varepsilon(p) < -1$

---

## 2. Lineær approksimasjon




**Eks:** $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$

Tangentfunksjonen i 1 finner vi ved å bruke ettpunktsformelen $y - 1 = f'(1) \cdot (x - 1)$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) = P_1(x)$$

f.eks: $P_1(1{,}1) = 1 + \frac{1}{2}(1{,}1 - 1) = 1{,}05$

$$\sqrt{1{,}1} = 1{,}04881\ldots$$

Mønster: $\boxed{P_1(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)}$

(i eks. var $a = 1$)

## 3. Kvadratisk approksimasjon

Eks: $f(x) = \sqrt{x}$ (i 1)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}\cdot x^{-1,5}$$

$$= -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$f''(1) = -\frac{1}{4\cdot 1\sqrt{1}} = -\frac{1}{4}$$

$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{f''(1)}{2}\cdot(x-1)^2$$

$$= \overbrace{1 + \frac{1}{2}(x-1)} - \frac{1}{4\cdot 2}(x-1)^2$$

$$P_2(1,1) = 1,04875 \qquad (\sqrt{1,1} = 1,04881\ldots)$$

Oppg: Beregn $P_2(1)$, $P_2'(1)$ og $P_2''(1)$.

Løsning: $P_2(1) = 1 + \frac{1}{2}(1-1) - \frac{1}{8}(1-1)^2 = 1 = f(1) = \sqrt{1}$

$$P_2'(x) = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\cdot 2\cdot(x-1)\cdot 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1)$$

$$P_2'(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(1-1) = \frac{1}{2} = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}}$$

$$P_2''(x) = -\frac{1}{4} \quad \text{så} \quad P_2''(1) = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4\cdot 1\cdot\sqrt{1}} = f''(1)$$

Mønster: $\boxed{P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}$

( i eks. er $a = 1$ )

---

## 4. Taylorpolynomer

**Eks:** $f(x) = \sqrt{x}$ ( i 1 )

$$P_1(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$$

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{2}}\right)' = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}-1}$$

$$= \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$$

$$f'''(1) = \frac{3}{8\cdot 1^2\cdot\sqrt{1}} = \frac{3}{8} \quad \text{og} \quad \frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{6} = \frac{3}{6\cdot 8} = \frac{3}{48}$$

Får $P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{3}{48}(x-1)^3$

Mønster: $\boxed{P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3}$

Dette er grad 3 Taylorpolynom $\underbrace{\text{i}}_{\text{til } f(x)}$ a

( i eks: $a = 1$, $f(x) = \sqrt{x}$ )

Taylorpolynomet av grad $n$ til $f(x)$ i $a$ er

$$\boxed{P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}}$$

der $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Oppg: Vi har $f(x) = \sqrt{x}$. Finn $P_1(x)$ og $P_2(x)$ for $a = 4$.

Løsning: $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

$f(4) = \sqrt{4} = 2$, $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$, $f''(4) = -\frac{1}{4 \cdot 4\sqrt{4}}$
$= -\frac{1}{32}$

$$P_1(x) = f(4) + f'(4)(x-4)$$
$$= \underline{\underline{2 + \frac{1}{4}(x-4)}}$$

$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{f''(4)}{2}(x-4)^2$$
$$= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{\left(\frac{1}{32}\right)}{2}(x-4)^2$$
$$= \underline{\underline{2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2}}$$

$$P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3$$