MET 1181, 14. forelesning, 11. nov. 2019, Runar Ile

1. Repetisjon og oppgaver
2. l'Hôpitals regel — kap 4.8
3. Grensekostnad, enhetskostnad, grenseinntekt — kap 4.9
4. Elastisitet — kap 4.9

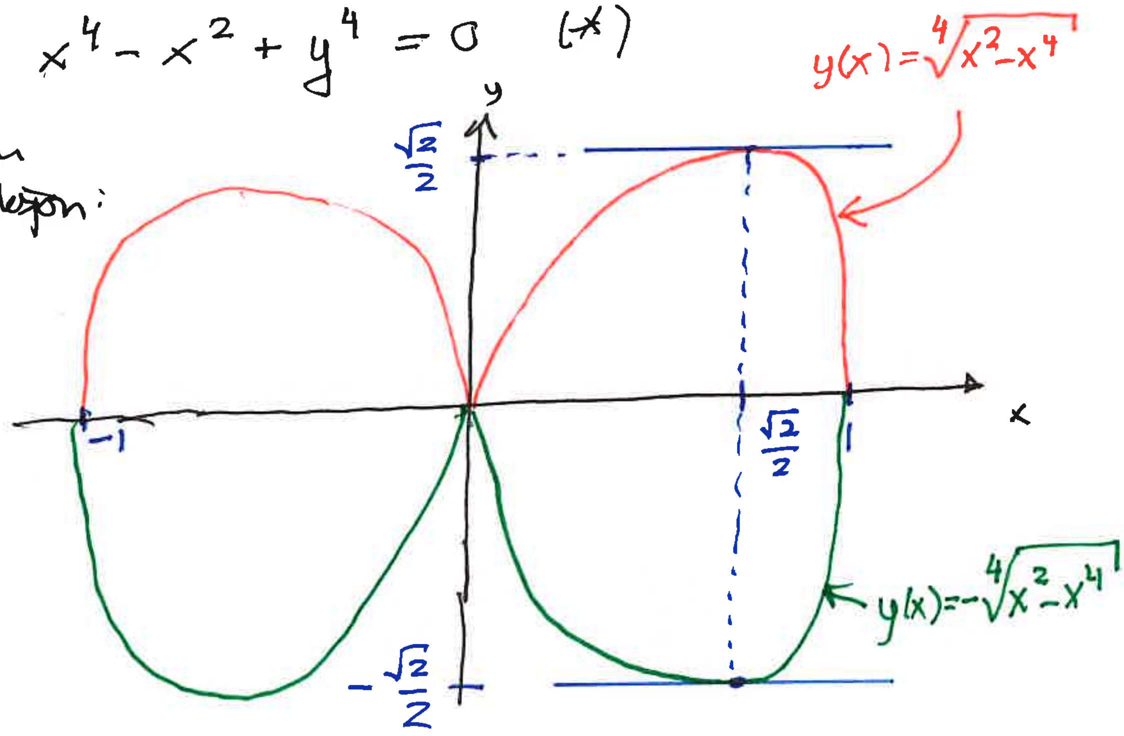
---

1. Rep. & oppg.

Implisitt derivasjon: Vi har en kurve definert ved en likning. Vil finne stigningstallet til en tangent til denne kurven uten å finne funksjonsuttrykket,

Oppg. 1c $\quad x^4 - x^2 + y^4 = 0 \quad (*)$

- ikke grafen til en funksjon:



Vi kan tenke at y er en av disse funksjonene.

Finner $y'(x)$ uttrykt ved hjelp av $y(x)$ og x.

Deriverer begge sider av likningen m.h.p. x

$$(x^4)'_x - (x^2)'_x + (y^4)'_x = (0)'_x$$

potensregel + kjerneregel

$$4x^3 - 2x + 4y^3 \cdot y' = 0$$

Løser likningen m.h.p. y'

$$4y^3 \cdot y' = 2x - 4x^3 = 2x(1-2x^2)$$

$$\underline{\underline{y'(x) = \frac{x(1-2x^2)}{2y^3}}}$$

Finner mulige y-verdier for den oppgitte $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Da er $x^2 = \frac{1}{2}$ og $x^4 = \frac{1}{4}$

og likningen $(*)$ gir da at

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + y^4 = 0 \quad \text{dvs} \quad y^4 = \frac{1}{4}$$

$$\text{dvs} \quad y^2 = \frac{1}{2} \quad \text{så} \quad y = \underline{\underline{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \underline{\underline{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

Stigningstallet til tangentene:

$$y' = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \overbrace{2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}^{1}\right)}{2\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3} = \underline{\underline{0}}$$

så tangentfunksjonene er konstante:

$$\underline{\underline{h_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{h_2(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

Krumning

Konveks : Grafen krummer oppover

dvs $f'(x)$ er voksende

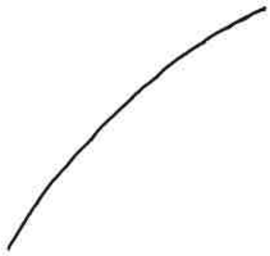
dvs $f''(x) \geq 0$

$y = f(x)$

Konkav : Grafen krummer nedover

dvs $f'(x)$ er avtagende

dvs $f''(x) \leq 0$



$y = f(x)$

Oppg 6c

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x + 1$$

Skal finne vendepunkter (der $f''(x)$ skifter fortegn) og hvor $f(x)$ er konveks/konkav.

Må derivere!

$$f'(x) \underset{\text{potens r.}}{\overset{\text{kjerne r.}}{=}} -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + 1 + 0$$

$$f''(x) \underset{\text{kjerne r.}}{\overset{\text{prod. r}}{=}} \underbrace{(-1) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + (-x) \cdot (-x) e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{felles faktor}} + 0$$

$$= (x^2 - 1) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Løser $f''(x) = 0$: $(x^2 - 1) e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$

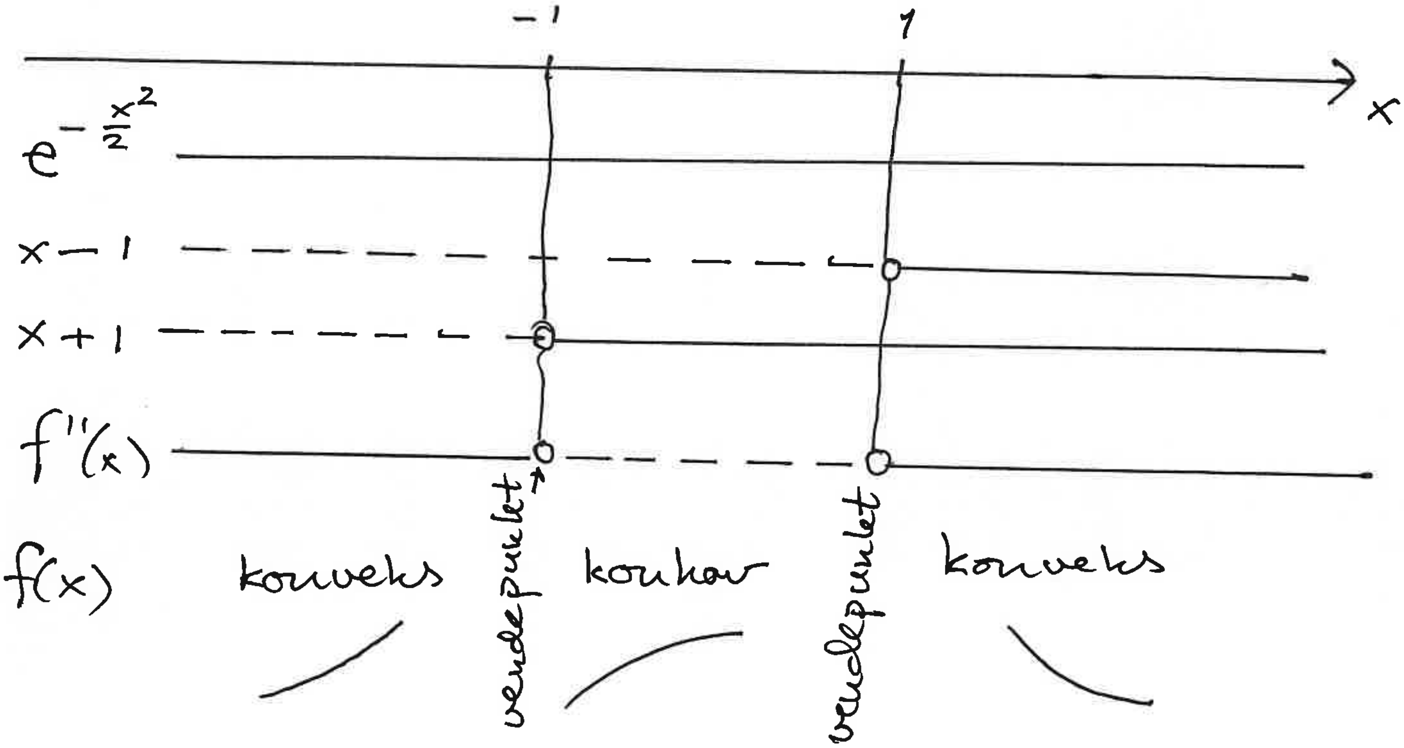
deler på $e^{-\frac{x^2}{2}}$ på b. s. fordi $e^u > 0$

dvs $x^2 - 1 = 0$ dvs $x^2 = 1$

dvs $x = \pm 1$ og

$$f''(x) = (x-1)(x+1) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Forteqnet til $f''(x)$ skifter for $x = \pm 1$:



så $\underline{\underline{x = -1}}$ og $\underline{\underline{x = 1}}$ er vendepunkter

og $f(x)$ er konveks for x i $\langle \leftarrow, -1]$ og for

x i $[1, \rightarrow\rangle$

$f(x)$ er konkav for x i $[-1, 1]$.

<u>Ettpunktsformelen</u> : $y - y_0 = a(x - x_0)$

der linjen går gjennom punktet (x_0, y_0)

med stigningstall a .

2. l'Hôpitals regel („loppitalls regel")

Grenser av typen $\frac{0}{0}$ og $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Skrivemåte: $\lim_{x\to 5} f(x)$ er tallet som $f(x)$ nærmer seg når x nærmer seg 5 mer og mer.

Eks: $f(x) = \dfrac{3x-3}{\ln(x)}$. Vil finne $\lim_{x\to 1} f(x)$.

teller: $3x - 3 \xrightarrow[x\to 1]{} 3\cdot 1 - 3 = 0$

nevner: $\ln(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \ln(1) = 0$

Altså $\frac{0}{0}$-uttrykk

Da kan vi bruke l'Hôpitals regel for å komme videre:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(3x-3)'}{[\ln(x)]'}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3}{\frac{1}{x}} = \frac{3}{\frac{1}{1}} = \underline{\underline{3}}$$

Deriverer teller og nevner for seg og prøver å finne grensen til den nye brøken.

Men: Må være $\frac{0}{0}$ eller $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$!

Oppg Bruk l'Hôpitals regel til å finne grensen

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1}$$

Løsning: $\lim_{x\to 0} x = 0$ og $\lim_{x\to 0} (e^x - 1) = 0$

så $\frac{0}{0}$-uttrykk. Da kan vi bruke l'Hôpital.

$(x)' = 1$ og $(e^x - 1)' = e^x$ så

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

Eks: $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{l'Hop}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{l'Hop}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \underline{\underline{0}}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ $\qquad$ $\frac{\infty}{\infty}$

3. Grensekostnad, enhetskostnad, grenseinntekt

$K(x)$ er kostnaden ved å produsere x enheter

$K'(x)$ er grensekostnaden (marginalkostnaden)

Tolkning: Hva koster det å produsere én enhet mer enn x enheter?

$$= K(x+1) - K(x) = \frac{K(x+1) - K(x)}{1}$$

$$\approx \lim_{h\to 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h} = K'(x)$$

Hvorfor $K'(x)$? – Mye enklere å bruke enn $K(x+1) - K(x)$

$I(x)$ inntekten ved å selge x enheter

$I'(x)$ grenseinntekten — " —

Eks: x = antall tonn laks.

$I'(50)$ = ekstra inntekt ved å selge ett tonn mer enn 50 tonn.

Profittfunksjonen:

$$P(x) = I(x) - K(x)$$

$P'(x)$ er grenseprofittfunksjonen

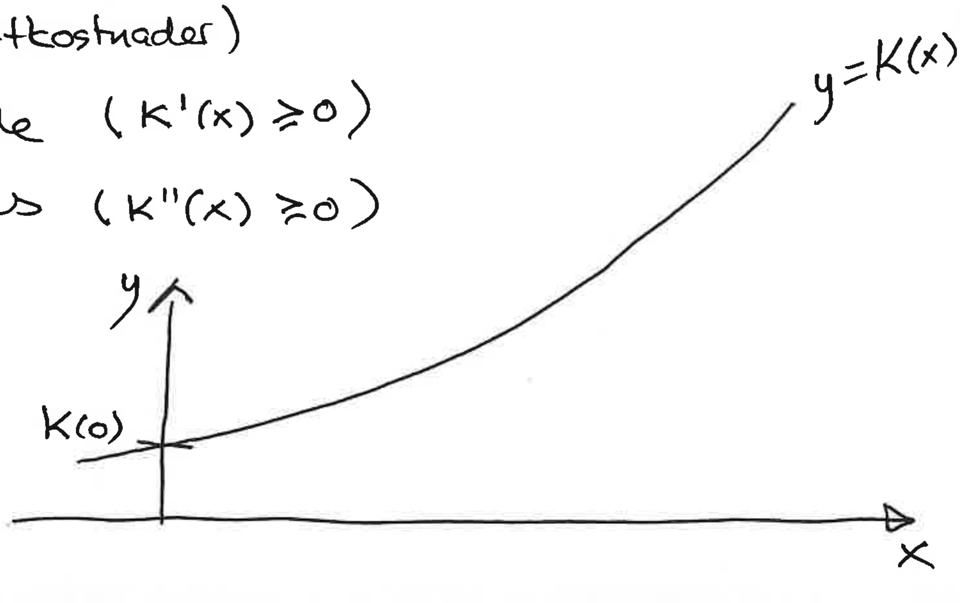
Enhetskostnaden ved å produsere x enheter:

$$A(x) = \frac{K(x)}{x}$$

"pris pr. enhet" – ikke konstant!

Definisjon $K(x)$ er en kostnadsfunksjon hvis

1. $K(0) > 0$ (startkostnader)
2. $K(x)$ voksende ($K'(x) \geq 0$)
3. $K(x)$ konveks ($K''(x) \geq 0$)



Definisjon: Hvis $x = c$ er et minimumspunkt for $A(x)$ kalles c for kostnadsoptimum.

Resultat: Hvis $K''(x) > 0$, så er kostnadsoptimum løsningen på likningen

$$K'(x) = A(x)$$

Begrunnelse: Finner stasjonære punkter til $A(x)$:

$$A'(x) = \left(\frac{K(x)}{x}\right)'$$

brøkregel

$$= \frac{K'(x) \cdot x - K(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{K'(x) - A(x)}{x}$$

deler på x i teller og nevner

så $A'(x) = 0$ tilsvarer $K'(x) - A(x) = 0$

dvs $K'(x) = A(x)$. Anta løsning $\underline{x = c}$

Bruker annenderiverttesten:

$A''(c) > 0 \Rightarrow c$ lok. ~~minimum~~ minimum.

$$A''(x) = \frac{[K'(x) - A(x)]' \cdot x - [K'(x) - A(x)] \cdot (x)'}{x^2}$$

$$= \frac{[K''(x) - A'(x)] \cdot x - [K'(x) - A(x)]}{x^2}$$

Setter inn $x = c$ (det stasjonære pkt.)

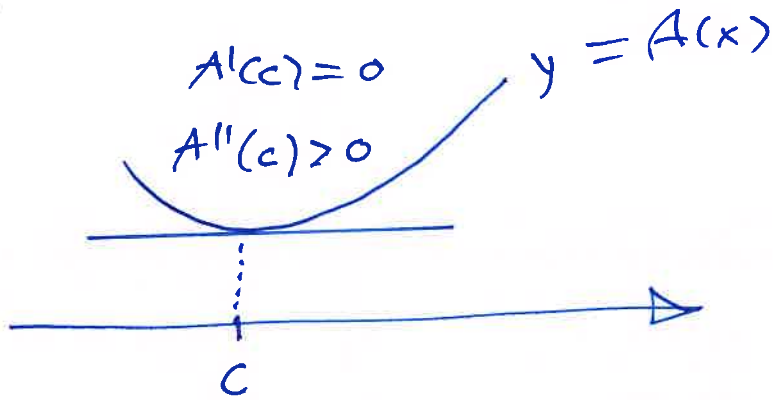
$$A''(c) = \frac{[K''(c) - \overbrace{A'(c)}^{0}]\cdot c - \overbrace{[K'(c) - A(c)]}^{=0 \text{ (har vist)}}}{c^2}$$

$$= \frac{K''(c)\cdot c}{c^2} = \frac{K''(c)}{c} > 0$$

(for $c > 0$)

Så $x = c$ er et lok. minimumspkt.

for $A(x)$.



Eks: $K(x) = x^2 + 200x + 160.000$

Dette er en kostnadsfunksjon fordi

(1) $K(0) = 160\,000 > 0$

(2) $K'(x) = 2x + 200 > 0$ for $x > 0$

(3) $K''(x) = 2 > 0$

Enhetskostnaden $A(x) = \dfrac{K(x)}{x} = \dfrac{x^2 + 200x + 160\,000}{x}$

$$= x + 200 + \frac{160\,000}{x}$$

Kostnadsoptimum er løsningen på likningen

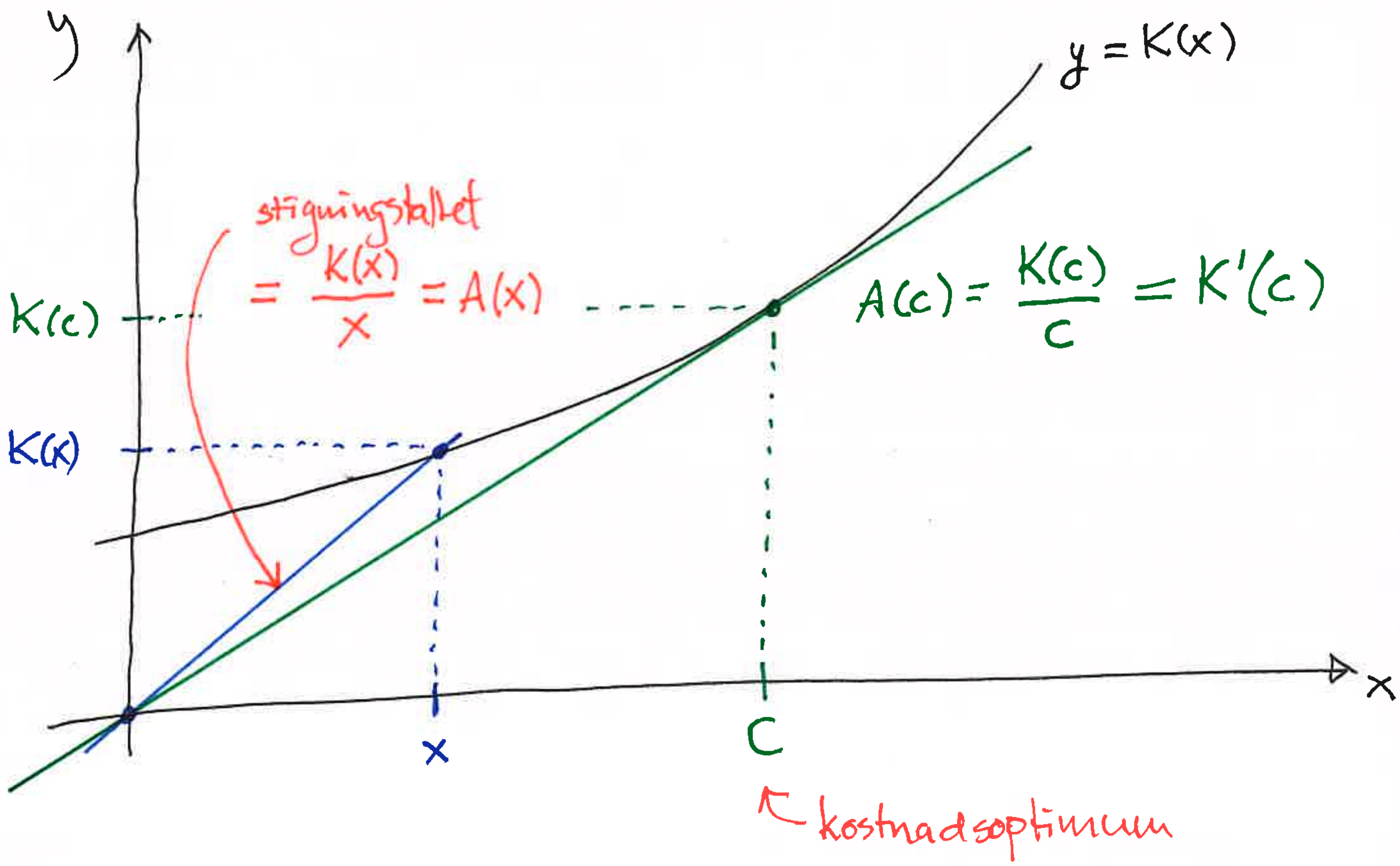
$K'(x) = A(x)$ dvs $\cancel{2}x + \cancel{200} = \cancel{x} + \cancel{200} + \frac{160\,000}{x}$

dvs $x = \frac{160\,000}{x}$ dvs $x^2 = 160\,000$

dvs $x = \underline{\underline{400}}$ (bare positive x).

Minimal enhetspris:

$A(400) = K'(400) = 2 \cdot 400 + 200 = \underline{\underline{1000}}$



og $A(c) = \frac{K(c)}{c}$ er minimal enhetspris.

4. Elastisitet

p = pris , $D(p)$ = etterspørsel
(= ant. solgte enheter)

<u>Eks</u>: Ett fat Nordsjøolje koster \$ 66,42
1 liter ——— " ——— 3,55 kr

Priselastisiteten til etterspørselen er

$$\varepsilon = \frac{\text{relativ etterspørselsendring}}{\text{relativ prisendring}}$$

<u>Eks</u>: På en måned synker prisen på en vare fra 12 tusen til 10 tusen og etterspørselen øker fra 50 mill til 60 mill

Da er

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{60-50}{50}\right)}{\left(\frac{10-12}{12}\right)} = \frac{\frac{10}{50}}{\frac{-2}{12}} = \frac{120}{-100}$$

$$= \underline{\underline{-1,2}}$$

Anta prisen endres fra p til $p+h$.
Da er relativ prisendring $\frac{p+h-p}{p} = \frac{h}{p}$

$$\frac{\left(\frac{D(p+h)-D(p)}{D(p)}\right)}{\frac{h}{p}} = \frac{\text{relativ etterspørselsendring}}{\text{relativ prisendring}}$$

$$= \frac{D(p+h)-D(p)}{h} \cdot \frac{p}{D(p)}$$

$$\Big\downarrow h \to 0$$

økonomer skriver:

$$\varepsilon(p) = D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)} \qquad \left(= El_p\, D(p) \right)$$

– den momentane priselastisiteten til etterspørselsfunksjonen

<u>Tolkning</u>: Hvis prisen øker 1 % så endres etterspørselen med $\varepsilon(p)$ %

Totalt „forbruk" = pris for en enhet · ant. solgte enheter

$$E(p) = p \cdot D(p)$$

Grenseforbruk blir

$$E'(p) \overset{\text{produktr.}}{=} 1 \cdot D(p) + p \cdot D'(p)$$

$$= D(p)\left[1 + \frac{p \cdot D'(p)}{D(p)}\right]$$

$$= \underbrace{D(p)}_{\text{alltid pos.}} \cdot \underbrace{\left[1 + \varepsilon(p)\right]}_{\text{pos/neg. ??}}$$

$\varepsilon(p) < -1$

gir neg. $E'(p)$

kalles <u>elastisk</u> etterspørsel

$\varepsilon(p) > -1$

gir pos. $E'(p)$

kalles for <u>uelastisk</u> etterspørsel

$\varepsilon(p) = -1$: nøytralelastisk.

<u>Eks:</u> $D(p) = 50 - p$ for $0 < p < 50$

Da er $D'(p) = -1$ og $\varepsilon(p) = \dfrac{D'(p) \cdot p}{D(p)}$

$$= \frac{(-1) \cdot p}{50 - p} = \frac{-p}{50 - p}$$

Når er det elastisk etterspørsel?

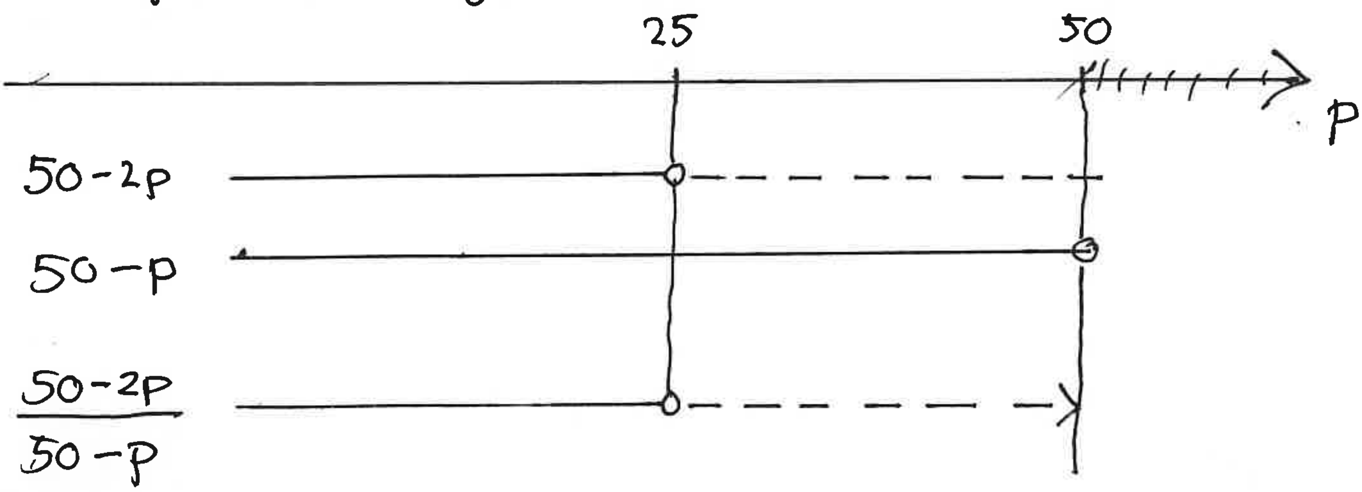
Dvs løse ulikheten $\dfrac{-p}{50-p} < -1$

$$\frac{-p}{50-p} + 1 < 0$$

dvs $$\frac{-p + 50 - p}{50 - p} < 0$$

dvs $$\frac{50 - 2p}{50 - p} < 0$$

Lager fortegnsskjema:



Så elastisk etterspørsel for p i $\langle 25, 50 \rangle$

og uelastisk —— " —— $\langle 0, 25 \rangle$

og nøytralelastisk etterspørsel for $p = 25$