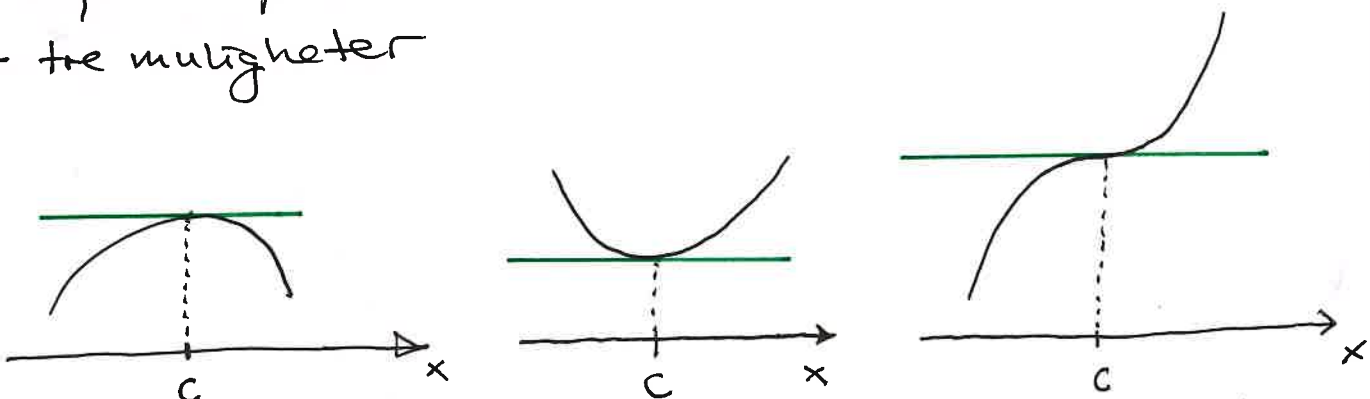
MET1181, 13. forelesning, 4. nov. 2019, Runar Ile

1. Repetisjon og oppgaver
2. Implisitt derivasjon — kap 4.5
3. Den annenderiverte og krumning — kap 4.7

1. Rep. & oppg.

stasjonært punkt: En x-verdi c der $f'(c) = 0$
– tre muligheter



lokalt. maks.pkt. — lok. min.pkt — terrassepunkt – hverken lok. min el. lok. maks.

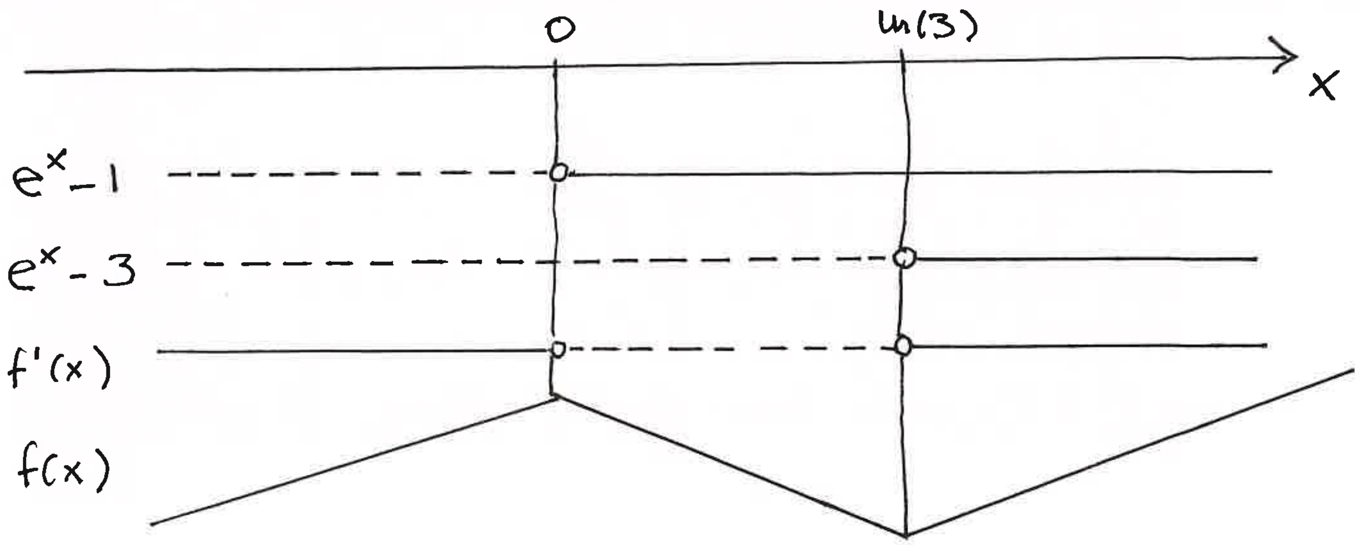
Bruker fortegnsskjema for $f'(x)$ for å avgjøre hvor $f(x)$ er
strengt voksende ($f'>0$)
strengt avtagende ($f'<0$)
Dette avgjør også om det stasjonære punktet er lok. min/maks eller terrassepunkt.

Oppg 4g $f'(x) = e^{2x} - 4e^{x} + 3$. Vil bruke fortegnsskjema til å bestemme hvor $f(x)$ er strengt voksende/avtagende.
Men $f'(x)$ først faktoriseres (et kamuflert annengradsuttrykk).

Setter $u = e^x$. Da $u^2 = e^x \cdot e^x = e^{2x}$

Får $u^2 - 4u + 3 = (u-1)(u-3)$

dvs $f'(x) = (e^x - 1)(e^x - 3)$



Så $f(x)$ er strengt voksende for x i $\langle \leftarrow, 0]$

$f(x)$ er strengt avtagende for x i $[0, \ln(3)]$

$f(x)$ er —"— voksende for x i $[\ln(3), \rightarrow\rangle$

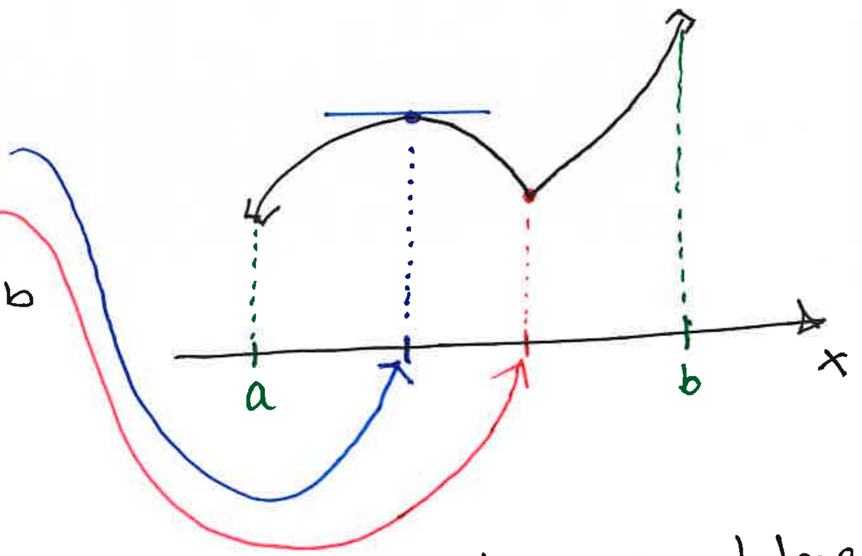
Hvis definisjonsmengden til $f(x)$ er et lukket intervall $[a, b]$ har $f(x)$ et maksimum og et minimum i intervallet.

Mulighetene:

(*) Stasjonære punkter

(*) Knekkpunkter

(*) Endepunktene a og b



Regner ut verdiene til $f(x)$ i disse punktene og sammenligner.

<u>Oppg. 5f</u> $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$, $D_f = [4, 5]$

Vil finne maks/min.

Stasjonære punkter: Løser likningen $f'(x)=0$

Finner $f'(x)$ ved å bruke kjerneregelen to ganger.

Setter $u=u(x)=1+e^{-x}$. Får $g(u)=\ln(u)$

$g'(u)=\frac{1}{u}$

hjelpe-regning

$$(e^{-x})' \overset{\text{kjerner. m. } u=-x}{=} (-x)'_x \, (e^u)'_u$$

$$= -1\cdot e^u = -e^{-x}$$

$$u'(x) = 0 - e^{-x} = -e^{-x}$$

$$\text{Så } f'(x) \overset{\text{kjerner.}}{=} g'(u)\cdot u'(x)$$

$$= \frac{1}{u}\cdot(-e^{-x}) = -\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

som er mindre enn 0 for alle x.

Altså er $f(x)$ strengt avtagend for alle x.

– ingen stasjonære punkter.

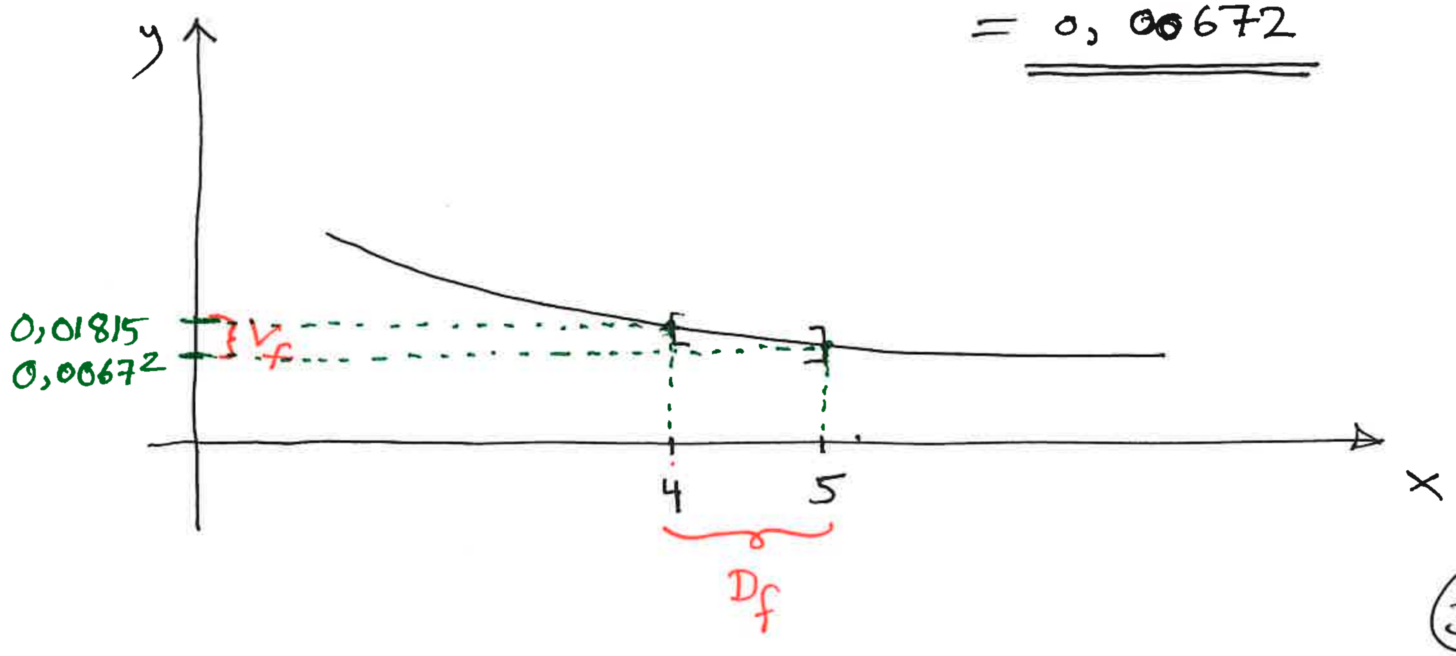
Det er heller ingen knekkpunkter fordi $f'(x)$ finnes overalt.

Dermed gir $x=4$ maksimum $f(4)=\ln(1+e^{-4})$

$$=\underline{\underline{0{,}01815}}$$

og $x=5$ gir minimum $f(5)=\ln(1+e^{-5})$

$$=\underline{\underline{0{,}00672}}$$



Oppg 3c Enklere å finne hva som er galt! Antar f(x) er den grønne. Da er den fiolette f'(x). Men stigningstallet til tangenten til f(x) er negativt for $x > 3$, mens funksjonsverdiene til den fiolette er positive for $x > 3$.

Altså må det være omvendt: f(x) er den fiolette.

---

2. Implisitt derivasjon

Eks:
$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$
$$f'(x) = (-1)\cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

– vanlig derivasjon.

Setter $y = f(x)$, så $y = \frac{1}{x} \quad \Big| \cdot x$

får $xy = 1$

Deriverer v.s og h.s. med hensyn på x

$$(xy)'_x = (1)'_x$$

Produktregelen gir

$$(x)'\cdot y + x\cdot y' = 0$$

dvs $1\cdot y + x\cdot y' = 0$

Kan løse denne likningen for y'.

For $x \cdot y' = -y$ $\quad \Big| :x$

dvs $y' = -\dfrac{y}{x}$ $\quad \left(= -\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = -\dfrac{1}{x^2} \right)$

Poenget: Vi behøver ikke kjenne uttrykket for $y(x)$!

Dette kalles implisitt derivasjon.

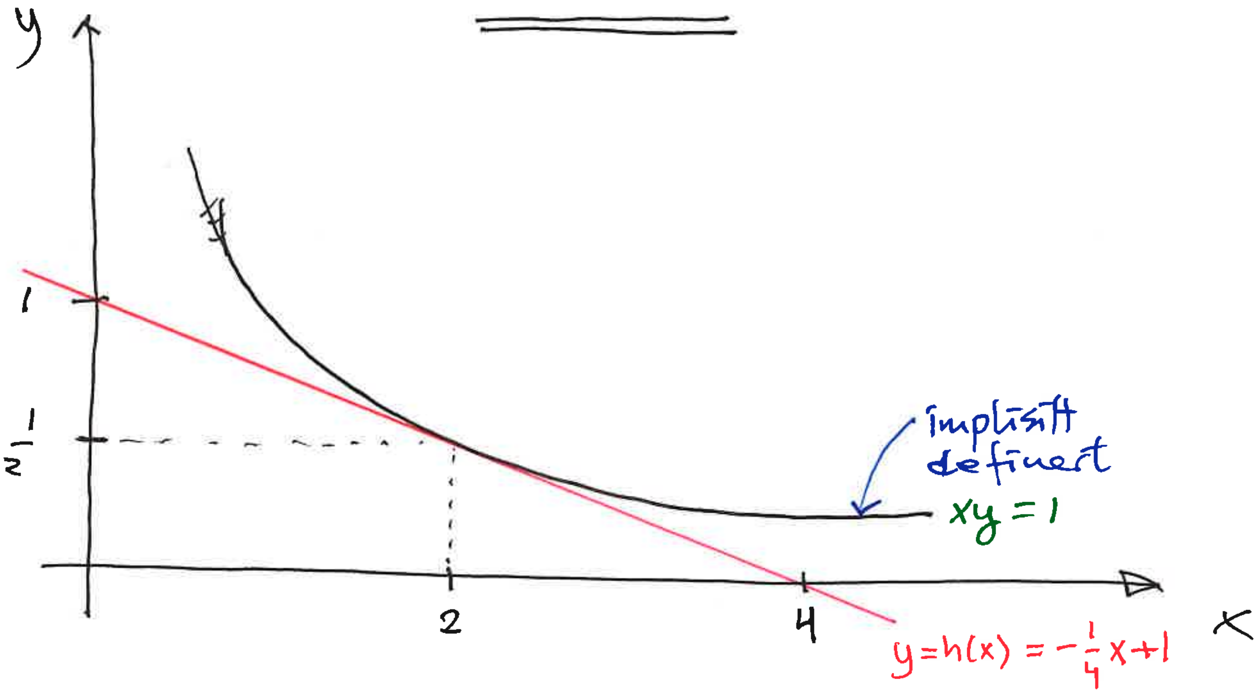
F.eks. hvis $x = 2$, da er $2 \cdot y = 1$ dvs

$y = \frac{1}{2}$ og $y'_{\substack{x=2 \\ y=\frac{1}{2}}} = -\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = -\dfrac{1}{4}$

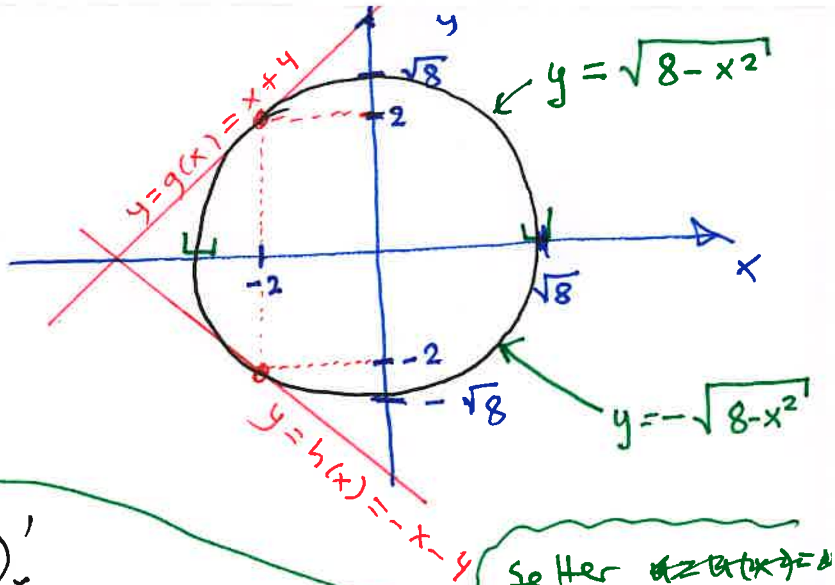
Kan bruke dette stigningstallet til å finne funksjonsuttrykket $h(x)$ til tangenten i punktet $\left(2, \frac{1}{2}\right)$:

Ettpunktsformelen gir $h(x) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2)$

så $h(x) = -\frac{1}{4}x + 1$



Eks: $x^2 + y^2 = 8 \quad (*)$



Sirkelen består alle løsninger (x, y) til likningen.

Deriverer begge sider av likningen:

$$(x^2)'_x + (y^2)'_x = (8)'_x$$

potensregelen og kjerneregelen

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

Setter ~~[illegible]~~
$u = y(x)$
$u'_x = y'$ og
$g(u) = u^2$
$g'(u) = 2u$
$= 2y$

Løser denne likningen for y':

Får $\quad 2y \cdot y' = -2x \quad | : 2y$

$$y' = -\frac{x}{y} \quad (**)$$

F.eks. $x = -2$ gir $(*)$ $(-2)^2 + y^2 = 8$, dvs $y^2 = 4$

$y = \pm 2$

For $y = -2$ gir $(**)$ $y'_{\substack{x=-2 \\ y=-2}} = -\frac{-2}{-2} = -1$

Som gir tangentfunksjonen $h(x) - (-2) = -1 \cdot (x - (-2))$

dvs $h(x) = \underline{\underline{-x - 4}}$

For $y = 2$ gir $(**)$ $y' = -\frac{-2}{2} = 1$ som gir tangentfunksjonen $g(x) - 2 = 1 \cdot (x - (-2))$, dvs

$g(x) = \underline{\underline{x + 4}}$

Oppg En kurve er implisitt definert ved at

$$y^2 - x^3 = 1$$

a) Uttrykk y' ved hjelp av y og x ved implisitt derivasjon.

b) Finn alle løsninger for y når $x = 2$

c) Beregn y' for disse punktene.

Løsning a) $(y^2)'_x - (x^3)'_x = (1)'$

$$2y \cdot y' - 3x^2 = 0$$

og løser for y': $\underline{\underline{y' = \dfrac{3x^2}{2y}}}$

b) $\underline{x=2}$: $y^2 - 2^3 = 1$

dvs $y^2 = 9$ dvs $y = \underline{\underline{\pm 3}}$

c) $(2,-3)$: $y' = \dfrac{3 \cdot 2^2}{2 \cdot (-3)} = \underline{\underline{-2}}$

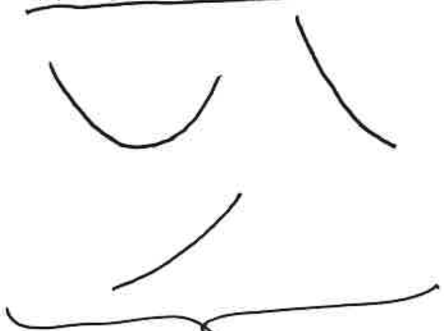
$(2,3)$: $y' = \dfrac{3 \cdot 2^2}{2 \cdot 3} = \underline{\underline{2}}$

---

3. Den annenderiverte og krumning

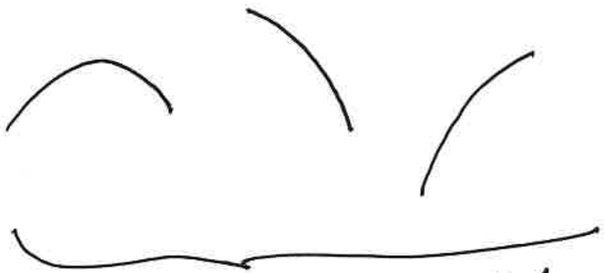
Hvilken vei krummer grafen?

krummer opp

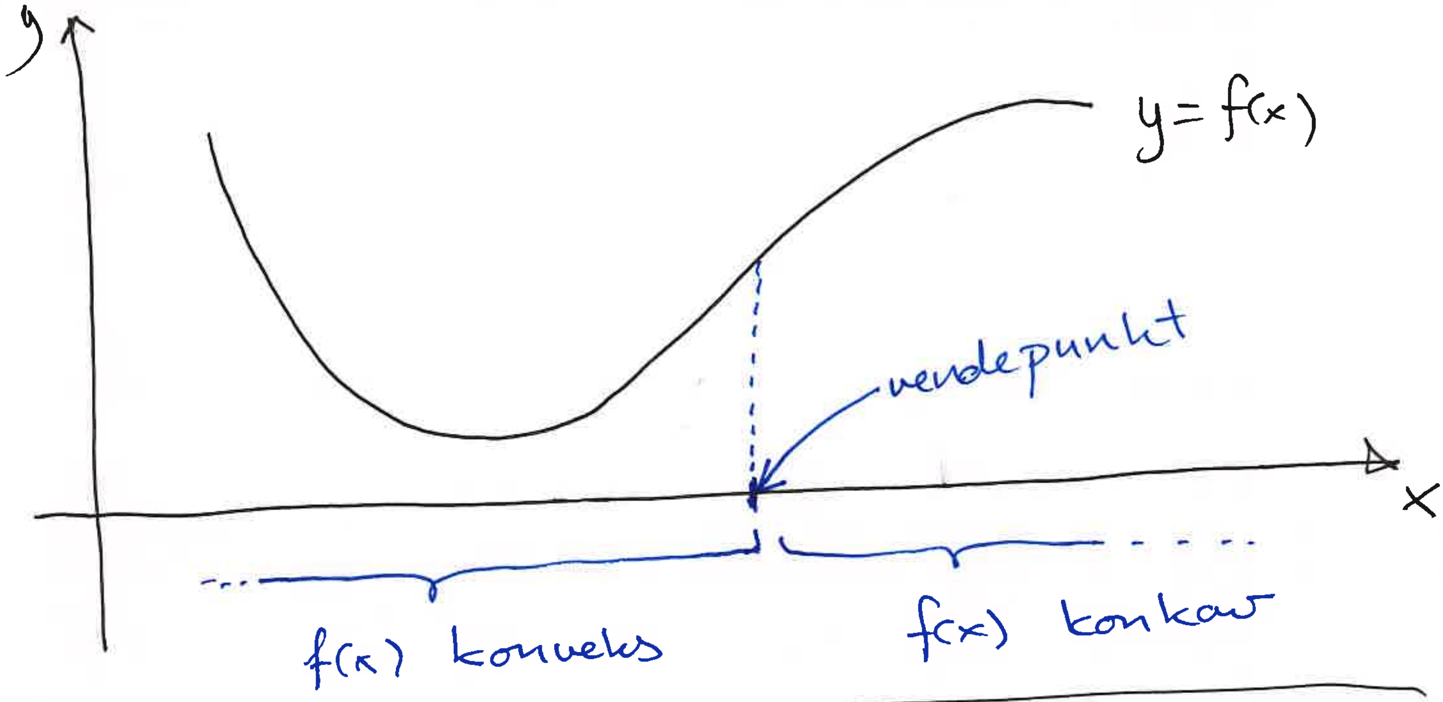


konveks graf/funksjon

krummer ned



konkav graf/funksjon



Definisjon: $f(x)$ er konveks (konkav) på intervallet $[a, b]$ hvis

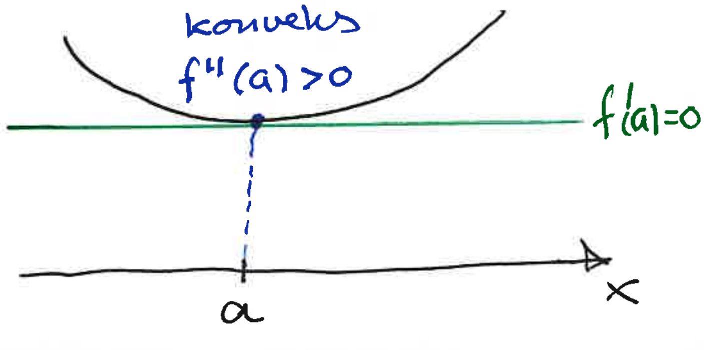
$f''(x) \geq 0$ for alle x i $\langle a, b \rangle$

(eller $f''(x) \leq 0$ —— " ——)

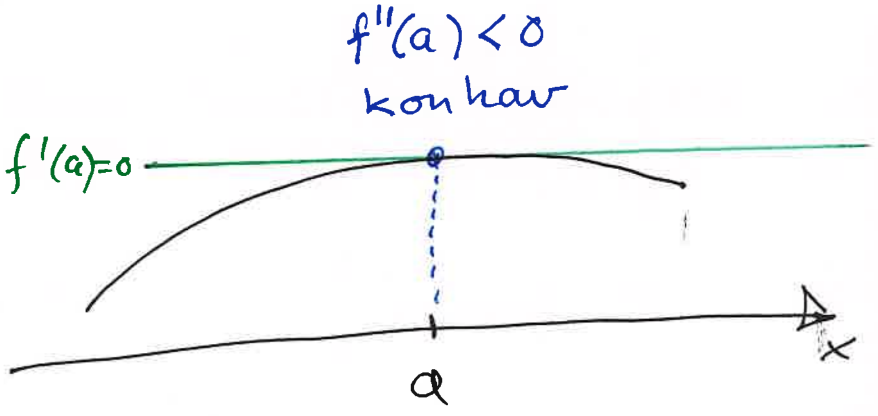
f(x) konveks: Den deriverte til $f'(x)$ er positiv, dvs $f'(x)$ er en voksende funksjon

f(x) konkav: Den deriverte til $f'(x)$ er negativ, dvs $f'(x)$ er en avtagende funksjon.

Annenderiverttesten. Anta $x = a$ er et stasjonært punkt for $f(x)$. Hvis $f''(a) > 0$ så er $x = a$ et lokalt minimumspunkt.



Hvis $f''(a) < 0$ så er $x = a$ et lokalt maksimumspunkt



Eks: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

Da er $f'(x) = 3x^2 - 3 \cdot 2x + 0 = 3x^2 - 6x$

stasjonære punkter: Løsninger på likn: $f'(x) = 0$

dvs $3x^2 - 6x = 0$ dvs $3x(x-2) = 0$

dvs $\underline{x = 0}$ el. $\underline{x = 2}$

Vil bruke annenderiverttesten:

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 - 6x)' = 3 \cdot 2x - 6$$

$$= 6x - 6$$

Setter inn de stasjonære punktene:

$f''(0) = -6 < 0$

Dvs $x = 0$ er et lokalt maks.pkt.

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0$

Dvs $x = 2$ er et lokalt min.pkt.

Konveks optimering

Hvis $f(x)$ er konveks i hele sitt definisjonsområde, vil ethvert stasjonært punkt gi globalt minimum.

(og hvis $f(x)$ konkav overalt: globalt maks)

Eks: $f(x) = \dfrac{e^x}{x-2}$, $D_f = \langle 2, \rightarrow \rangle$

Vil finne glob. maks/min

$$f'(x) \underset{\text{regner og regner}}{\overset{\text{brøk reg.}}{=}} \frac{(x-3)e^x}{(x-2)^2}$$

så $f'(x) = 0$ har løsningen $x = 3$

Regner $f''(x) = \dfrac{[(x-3)e^x]'(x-2)^2 - (x-3)e^x \cdot [(x-2)^2]'}{((x-2)^2)^2}$

Hjelperegninger: $[(x-3)e^x]' \overset{\text{prod.r.}}{=} (x-2)e^x$

og $((x-2)^2)' = 2(x-2)\cdot 1 = 2(x-2)$.

$$= \frac{(x-2)e^x(x-2)^2 - (x-3)e^x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{[(x-2)^2 - 2(x-3)]e^x}{(x-2)^3}$$

$$= \frac{\overbrace{(x^2-6x+10)}e^x}{(x-2)^3}$$

fullfører kvadrat

$$= \frac{\left[(x-3)^2+1\right]e^x}{(x-2)^3} \quad \text{er}$$

større enn 0 for alle x i $D_f = \langle 2, \rightarrow \rangle$

Altså er $f(x)$ konveks i hele D_f
og $x = 3$ gir derfor globalt minimum

$$f(3) = \frac{e^3}{3-2} = e^3 = \underline{\underline{20,08}}$$