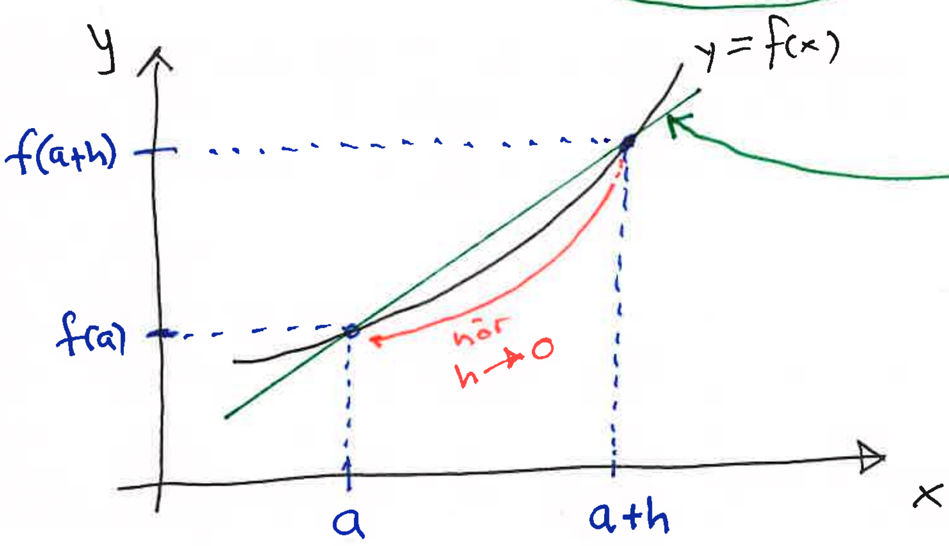
MET 1181, 12. forelesning, 28. okt. 2019, Runar Ile

1. Repetisjon og oppgaver — kap 4.3
2. Funksjonsdrøfting med maks/min — kap 4.6

1. Rep. & oppg.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

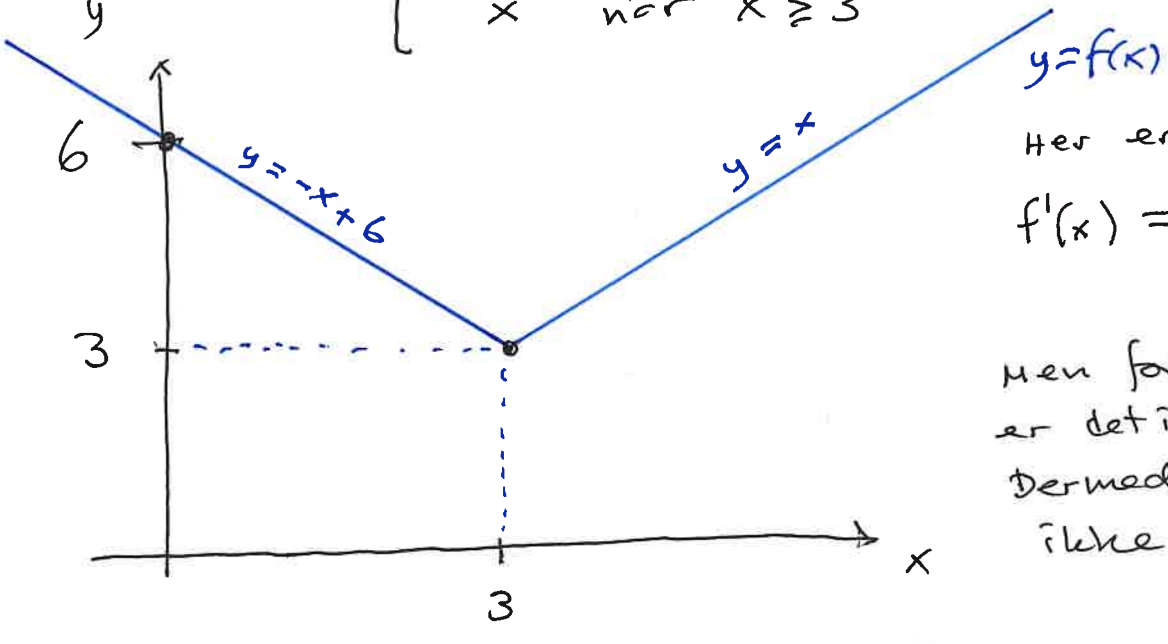
$=$ stigningstallet til sekanten



NB: Det er ikke alltid at den deriverte finnes!

Eks: $f(x) = |x-3| + 3 = \begin{cases} -(x-3)+3 & \text{når } x-3<0 \\ x-3+3 & \text{når } x-3 \geq 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} -x+6 & \text{når } x<3 \\ x & \text{når } x \geq 3 \end{cases}$$



Her er

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x<3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$$

Men for $x=3$ er det ingen tangent! Dermed finnes ikke $f'(3)$.

Vanskelig å bruke definisjonen av $f'(a)$.
Lettere å finne den deriverte funksjonen $f'(x)$.

Grunnleggende resultater:

$$[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad \text{for alle } n$$

Eks: $(x^{3,19})' = 3,19 \cdot x^{2,19}$

Produktregelen: $[g(x) \cdot h(x)]' = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Oppg 2h. $f(x) = 30\underbrace{x^2 e^x}\,\underbrace{\ln(x)}$

$$f'(x) \overset{\text{prod. reg.}}{=} 30\left([x^2 \cdot e^x]' \cdot \ln(x) + x^2 e^x \cdot [\ln(x)]'\right)$$

$$= 30\left(\underbrace{[2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x]}_{e^x \text{ felles faktor}} \cdot \ln(x) + x^{\cancel{2}} e^x \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right)$$

$$= 30\left(\underbrace{[2x + x^2]}_{x \text{ felles faktor}} e^x \cdot \ln(x) + x e^x\right)$$

$$= 30\left([2 + x]\, x e^x \ln(x) + x e^x\right) \quad \text{felles faktor}$$

$$= 30x\left((2+x)\ln(x) + 1\right) e^x$$

Brøkregelen: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, så vil

$$f'(x) = \frac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Oppg 3h: $f(x) = \frac{2\ln(x)}{3e^x}$ gir

$$f'(x) = \frac{[2\ln(x)]' \cdot 3e^x - 2\ln(x)\cdot(3e^x)'}{(3e^x)^2}$$

$$= \frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot 3e^x - 2\ln(x)\cdot 3\cdot e^x}{9e^{2x}} \quad \Big| \cdot \frac{x}{x} = 1$$

$$= \frac{6e^x - 6x\ln(x)e^x}{9xe^{2x}}$$

$$= \frac{\cancel{6}^{2}(1 - x\cdot\ln(x))\cdot \cancel{e^x}}{\cancel{9}^{3}xe^{2x}} = \frac{2(1 - x\ln(x))}{3xe^x}$$

$e^{2x} = \cancel{e^x}\cdot e^x$

Kjerneregelen: $f(x) = g(u(x))$

gir $f'(x) = g_u'(u(x))\cdot u'(x)$

Oppg 5, siste

$$f(x) = \frac{2}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$

Setter $u(x) = 2x+1$

får $u'(x) = 2$

og $g(u) = \frac{2}{u \cdot \sqrt{u}}$

$= \frac{2}{u^1 \cdot u^{0,5}}$

$= \frac{2}{u^{1,5}} = 2u^{-1,5}$

får $g'(u) = 2 \cdot (-1,5) \cdot u^{-1,5-1}$

$= -3 \cdot u^{-2,5}$

$= \frac{-3}{u^2\sqrt{u}}$

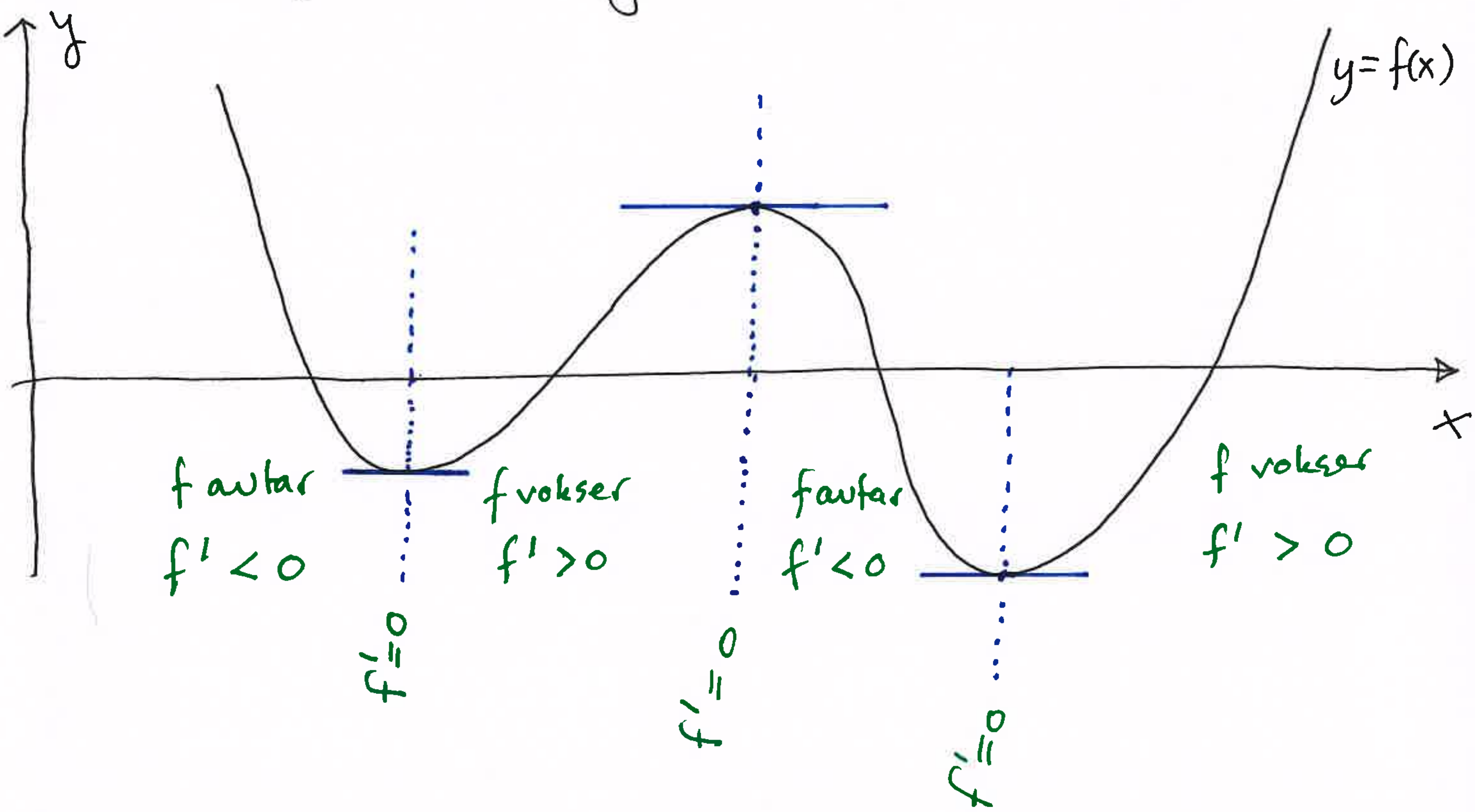
Bruker kjerneregelen:

$$f'(x) = \underbrace{\frac{-3}{u^2\sqrt{u}}}_{g'(u)} \cdot \underbrace{2}_{u'(x)}$$

$$= \frac{-6}{(2x+1)^2\sqrt{2x+1}}$$

$$= -6(2x+1)^{-2,5}$$

2. Funksjonsdrøfting med maks/min



Der $f'(x)$ er positiv, er grafen til $f(x)$ voksende

Der $f'(x)$ er negativ, er grafen til $f(x)$ avtagende

Viktig konklusjon: Fortegnsskjema for $f'(x)$ angir hvor $f(x)$ vokser og avtar.

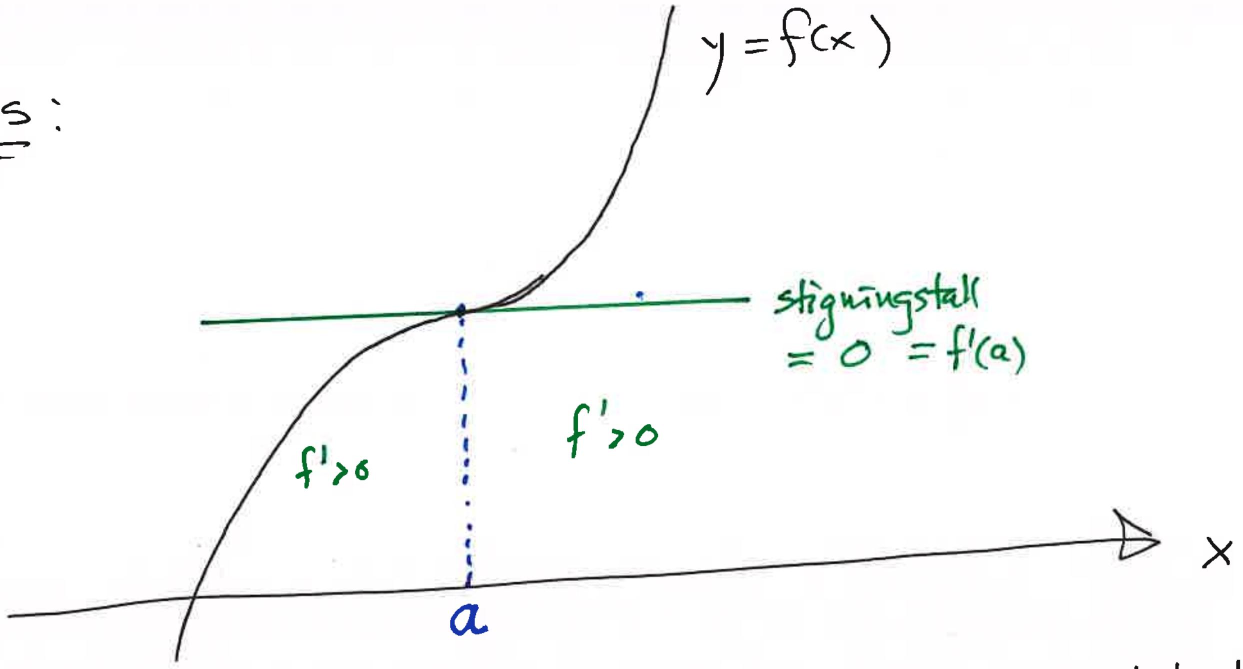
Hvis $x=a$ lokalt minimumspkt.: Da er $f'(a)=0$

og $f'(x)$ skifter fortegn fra − til +

Hvis $x=a$ lokalt maks.pkt.: Da er $f'(a)=0$

og $f'(x)$ skifter fortegn fra + til −

Eks:



Her er a ikke lokalt maks, og ikke lokalt min.
– et terrassepunkt. (den deriverte har ikke skiftet fortegn).

Definisjon: Hvis $f'(a) = 0$ er $x = a$ et stasjonært punkt

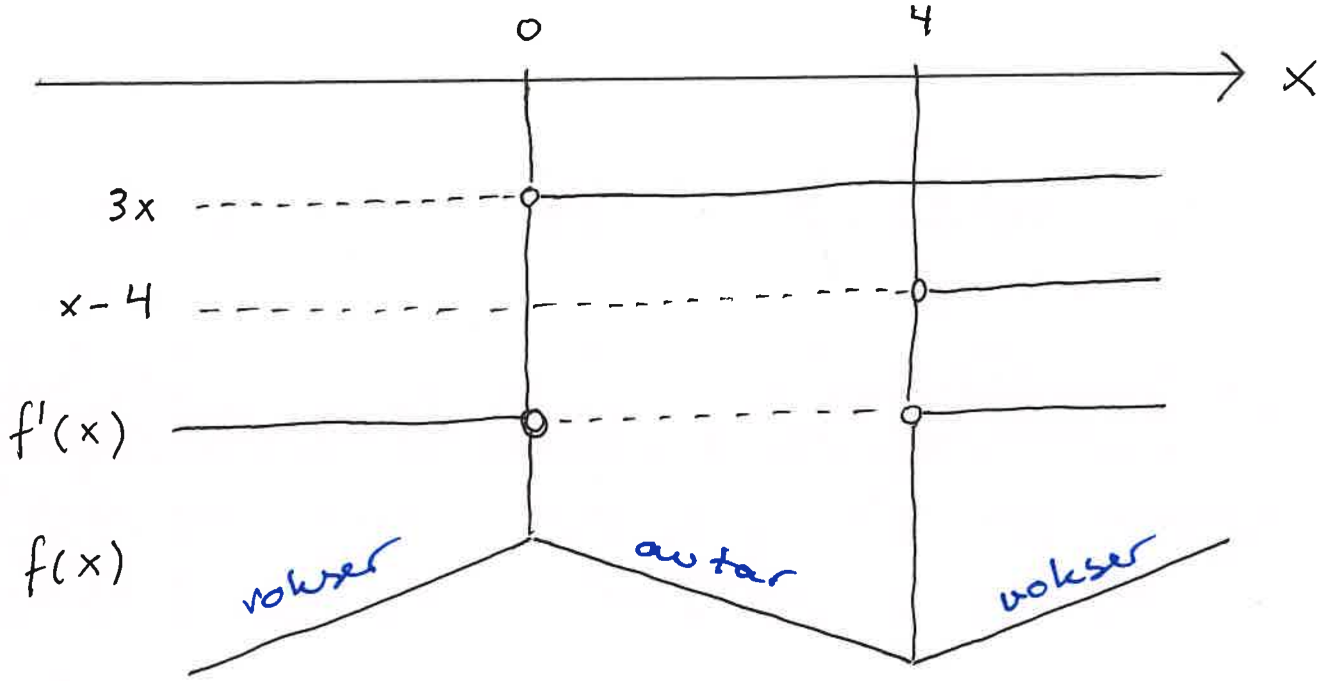
Eks: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

Stasjonære punkter: Løser likningen $f'(x) = 0$

$$f'(x) = (x^3)' - 6(x^2)' + (5)'$$
$$= 3x^2 - 6 \cdot 2x + 0 = 3x^2 - 12x$$
$$= 3x(x-4)$$

$f'(x)$ har derfor løsninger $x = 0$, $x = 4$

Hvor vokser/avtar $f(x)$? Vi drøfter fortegnet til $f'(x)$ i et fortegnsskjema:



$f(x)$ er strengt voksende for $x \leq 0$ (i $\langle \leftarrow, 0]$)

$f(x)$ er strengt avtagende for $0 \leq x \leq 4$ (i $[0, 4]$)

$f(x)$ er strengt voksende for $x \geq 4$ (i $[4, \rightarrow\rangle$)

Dermed er $x = 0$ et lokalt maksimumspunkt

og $x = 4$ et lokalt minimumspunkt.

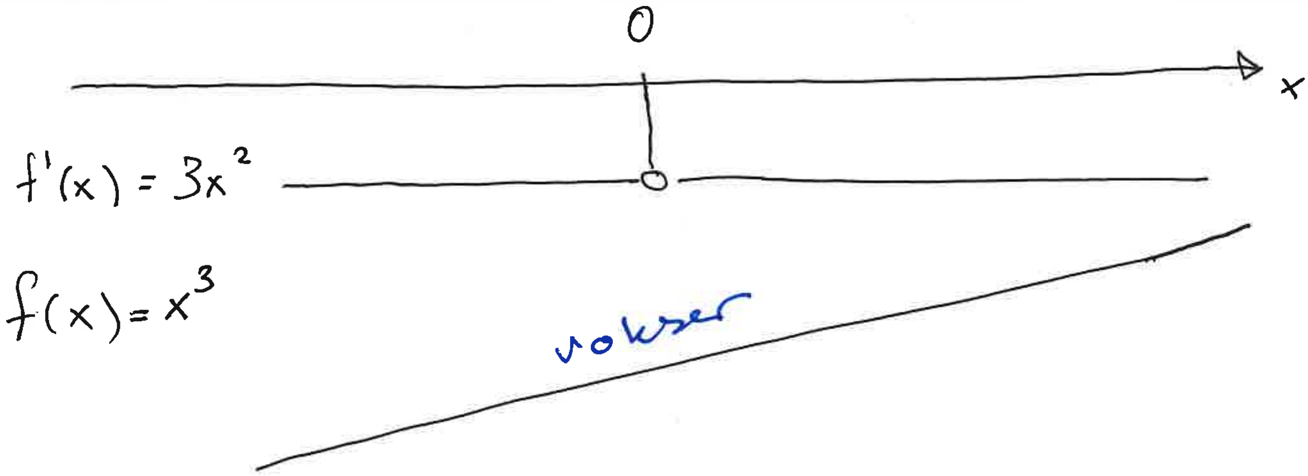
<u>Eks</u>: $f(x) = x^3$ gir $f'(x) = 3x^2$

Stasjonære punkter: $f'(x) = 0$

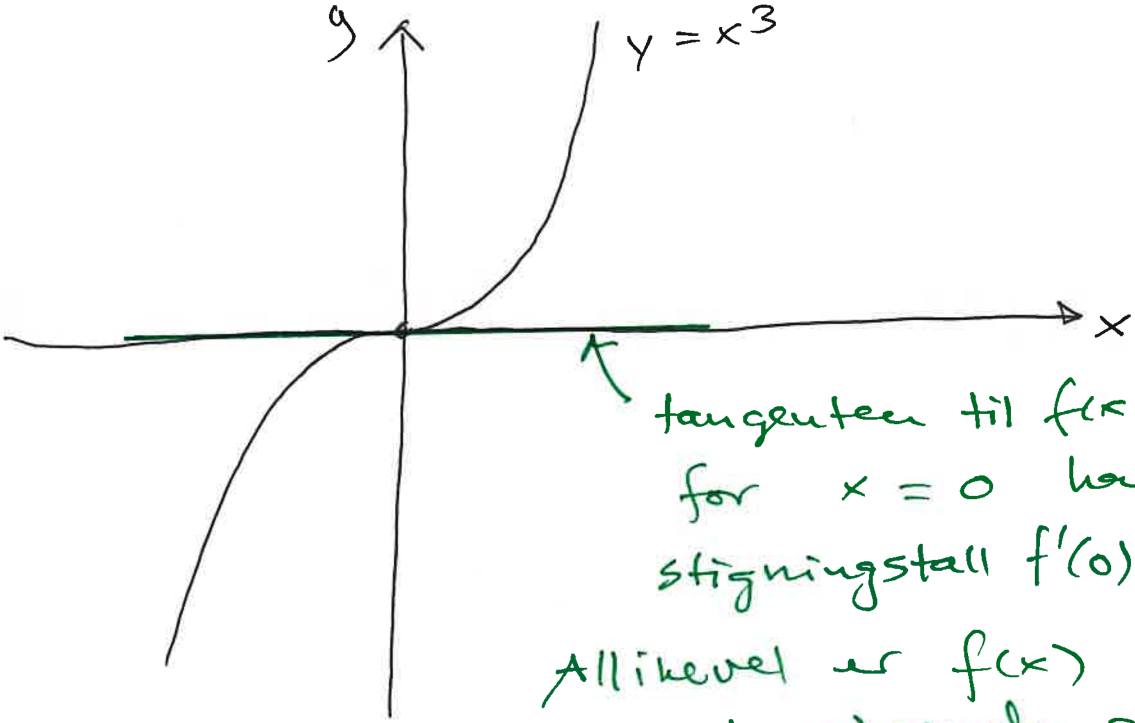
dvs $3x^2 = 0$

dvs $\underline{x = 0}$

(så $f'(0) = 0$)



så $f(x)$ er strengt voksende for alle tall på tallinjen (i $\mathbb{R}$).



tangenten til $f(x)$ for $x = 0$ har stigningstall $f'(0) = 0$

Allikevel er $f(x)$ strengt voksende på hele tallinjen.

Ekstremverdisetningen : Hvis $f(x)$ er kontinuerlig på intervallet $D_f = [a, b]$ så har $f(x)$ et maksimum („globalt") og et minimum („globalt")

Mulige maks/min.-punkter:

(*) stasjonære punkter (der $f'(x) = 0$)

(*) knekkpunkter (der $f'(x)$ ikke er definert)

(*) endepunktene til intervallet

Eks: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ og $D_f = [-1, 7]$

(*) Stasjonære punkter : $f'(x) = 3x^2 - 12x$
$= 3x(x-4) = 0$

dvs $\underline{x = 0}$, $\underline{x = 4}$

(*) ingen knekkpunkter ($f'(x)$ er definert for alle x)

(*) endepunkter : $\underline{x = -1}$, $\underline{x = 7}$

Regner funksjonsverdiene for disse kandidat-punktene :

$f(-1) = -2$

$f(0) = 5$

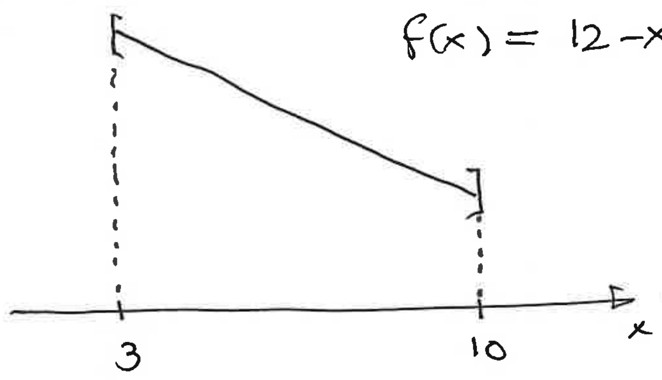
$f(4) = -27$

$f(7) = 54$

Så $x = 4$ gir minimum $f(4) = -27$

og $x = 7$ gir maksimum $f(7) = 54$

Eks:



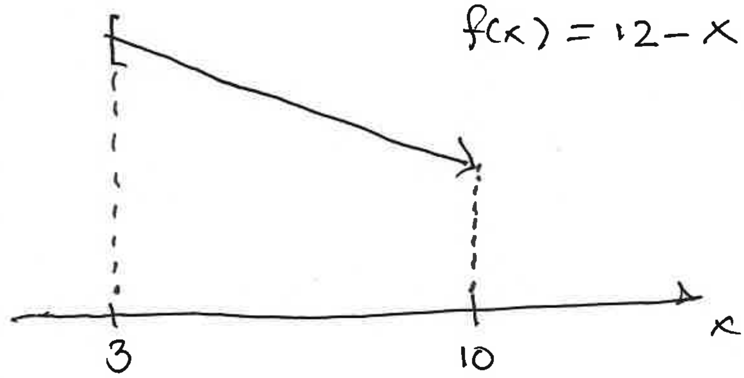
$f(x) = 12 - x$ og $D_f = [3, 10]$

- ingen stasjonære punkter ($f'(x) = -1$)
- ingen knekkpunkter

$x = 3$ gir maks.

$x = 10$ gir min.

Eks:



$f(x) = 12 - x$ og $D_f = [3, 10\rangle$

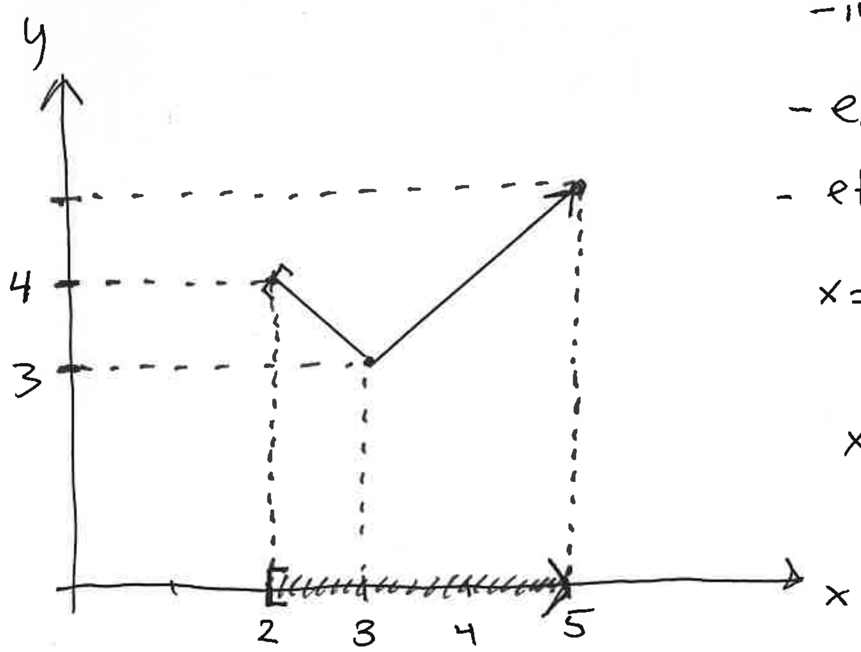
$x = 3$ gir maksimum

$f(3) = 9$

Men det finnes ikke noe minimum!

Eks: $f(x) = |x - 3| + 3 = \begin{cases} -x + 6 & \text{for} \quad x < 3 \\ x & \text{for} \quad x \geq 3 \end{cases}$

og $D_f = [2, 5\rangle$



- ingen stasjonære punkter
- ett knekkpunkt: $x = 3$
- ett endepunkt: $x = 2$

$x = 2$: lokalt maksimum (men ikke globalt)

$x = 3$: globalt minimum

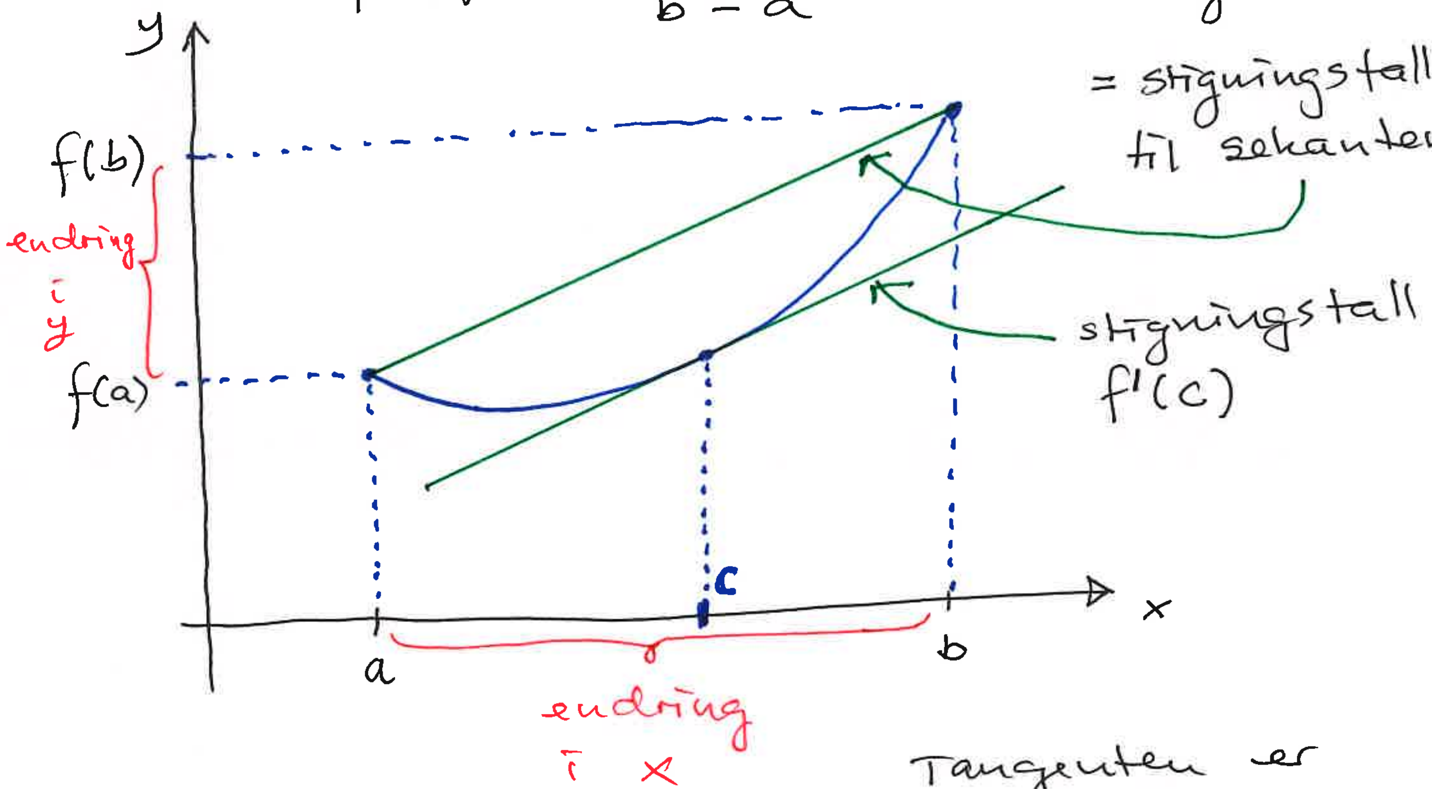
$f(2) = 4$

$f(3) = 3$

<u>Middelverdisetningen:</u> Hvis $f(x)$ er definert og kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ og deriverbar (ingen knekkpunkter) så finnes det et tall c mellom a og b $(a < c < b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\text{endring i } y}{\text{endring i } x}$$

= stigningstallet til sekanten



Tangenten er parallell med sekanten (samme stigningstall)

Eks: $f(x) = e^{x^2 - 4x} + 3x$

$f(1) = e^{1^2 - 4\cdot 1} + 3\cdot 1 = e^{-3} + 3$

$f(3) = e^{3^2 - 4\cdot 3} + 3\cdot 3 = e^{-3} + 9$

Ved middelverdisetningen finnes det et tall c mellom 1 og 3 slik at $f'(c) = \dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = \dfrac{e^{-3}+9-(e^{-3}+3)}{2} =$

$$= \frac{6}{2} = \underline{\underline{3}}$$

<u>NB</u>: $f'(x) = (2x-4)\,e^{x^2-4x} + 1$

Men $(2x-4)\,e^{x^2-4x} + 1 = 3$ er ikke mulig å løse eksakt.