MET 1181, 11. forelesning, 21. okt. 2019, Runar Ile

1. Rep. & oppg.
2. Tangenter og den deriverte — kap 4.1 (og 4.4)
3. Den deriverte som funksjon — kap 4.2
4. Derivasjonsreglene — kap 4.3

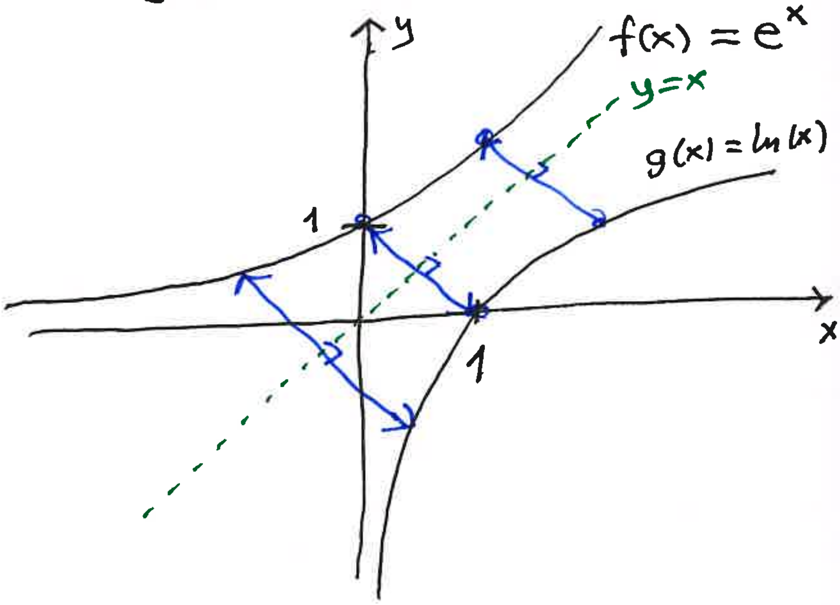
1. Rep. & oppg.

Omvendte funksjoner

Definisjon:

$f(g(x)) = x$ for alle x i D_g

$g(f(x)) = x$ —"— i D_f



*) Grafene er symmetriske om linjen $y = x$

*) For at $f(x)$ skal ha en omvendt funksjon må $f(x)$ være strengt voksende eller strengt avtagende i D_f.

*) NB: $D_g = V_f$ og $V_g = D_f$

Hvordan finner vi uttrykket for den omvendte funksjonen?

Oppg 2d $\quad f(x) = 20 + \frac{1}{x-3}$, $D_f = \langle 3, \rightarrow \rangle$

Finner den omv. funksj. $g(x)$: $\quad (x > 3)$

① Løser likningen $y = f(x)$ for x.

dvs $\quad y = 20 + \frac{1}{x-3}$

multipliserer med $(x-3)$ på b.s.

$$y(x-3) = 20\cdot(x-3) + \frac{1}{\cancel{x-3}}\cdot\cancel{(x-3)}$$

løser opp paranteser

$$yx - 3y = 20x - 60 + 1$$

alle ledd med x på v.s, resten på h.s.

$$yx - 20x = 3y - 59$$

faktoriserer ut x på v.s.

$$(y-20)x = 3y - 59$$

deler på $(y-20)$ på b.s. (antar $y \neq 20$)

$$x = \frac{3y-59}{y-20}$$

polynomdiv.

$$= 3 + \frac{1}{y-20}$$

② Bytter variablene x og y.

$$y = g(x) = 3 + \frac{1}{x-20}$$

③ Setter $D_g = V_f$ og finner den

V_f = mengden av y-verdier som „treffes" av $f(x)$ for $x \in D_f$, dvs de y slik at

$$y = \underbrace{20 + \frac{1}{x-3}}_{f(x)}$$ har en løsning x som ligger i $D_f = \langle 3, \rightarrow \rangle$

Når vi løste denne likningen i ① antok vi bare $y \neq 20$, men fordi x skal være større enn 3, vil

$f(x) = 20 + \frac{1}{x-3}$ være større enn 20

og dermed får vi $V_f = \langle 20, \rightarrow \rangle$

Altså $g(x) = 3 + \frac{1}{x-20}$, $D_g = \langle 20, \rightarrow \rangle$

Eksponentialfunksjoner og logaritmefunksjoner

$f(x) = a^x$, D_f = alle tall $(a > 0)$

$g(x) = \log_a(x)$, $D_g = \langle 0, \rightarrow \rangle = V_f$

Eks: Hvor lang tid tar det å doble innskuddet på en konto med 3% rente?

Løsning: Løser likningen $1{,}03^x = 2$ (*)

som gir $x = \log_{1{,}03}(2)$ pr. def.

Men vi kan ikke ta dette på kalkulatoren direkte!

Kan i stedet sette v. s. og h. s av (*)
inn i $\ln(x) = \log_e(x)$.

$$\ln(1{,}03^x) = \ln(2)$$

$$x \cdot \ln(1{,}03) = \ln(2)$$

dvs $$x = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}03)} = 23{,}45$$

Dette betyr også at

$$\log_{1{,}03}(2) = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}03)}$$

Oppg 6c $$\frac{3e^x}{e^x+1} < 5$$

Kan sette $u = e^x$ og løse ulikheten $\frac{3u}{u+1} < 5$

Men her er det enklere å multiplisere med e^x+1 på begge sider. Fordi e^x+1 er større enn 0 uansett hva x er, endrer dette ikke på ulikhetstegnet.

$$3e^x < 5(e^x+1) = 5e^x+5$$

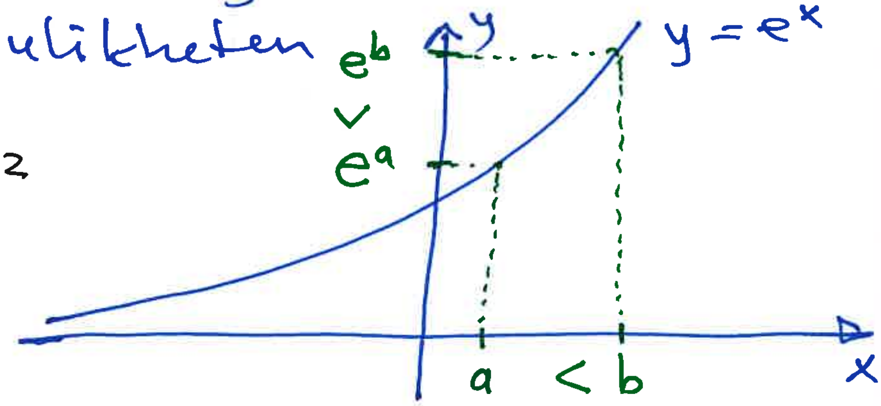
$$2e^x > -5$$

$$e^x > -\frac{5}{2} = -2{,}5$$

og dette er sant for alle tall x.

Oppg 6b $\qquad \ln(x-3) < -2$

Fordi e^x er strengt voksende for alle x kan vi sette vs og hs. inn i e^x og bevare ulikheten



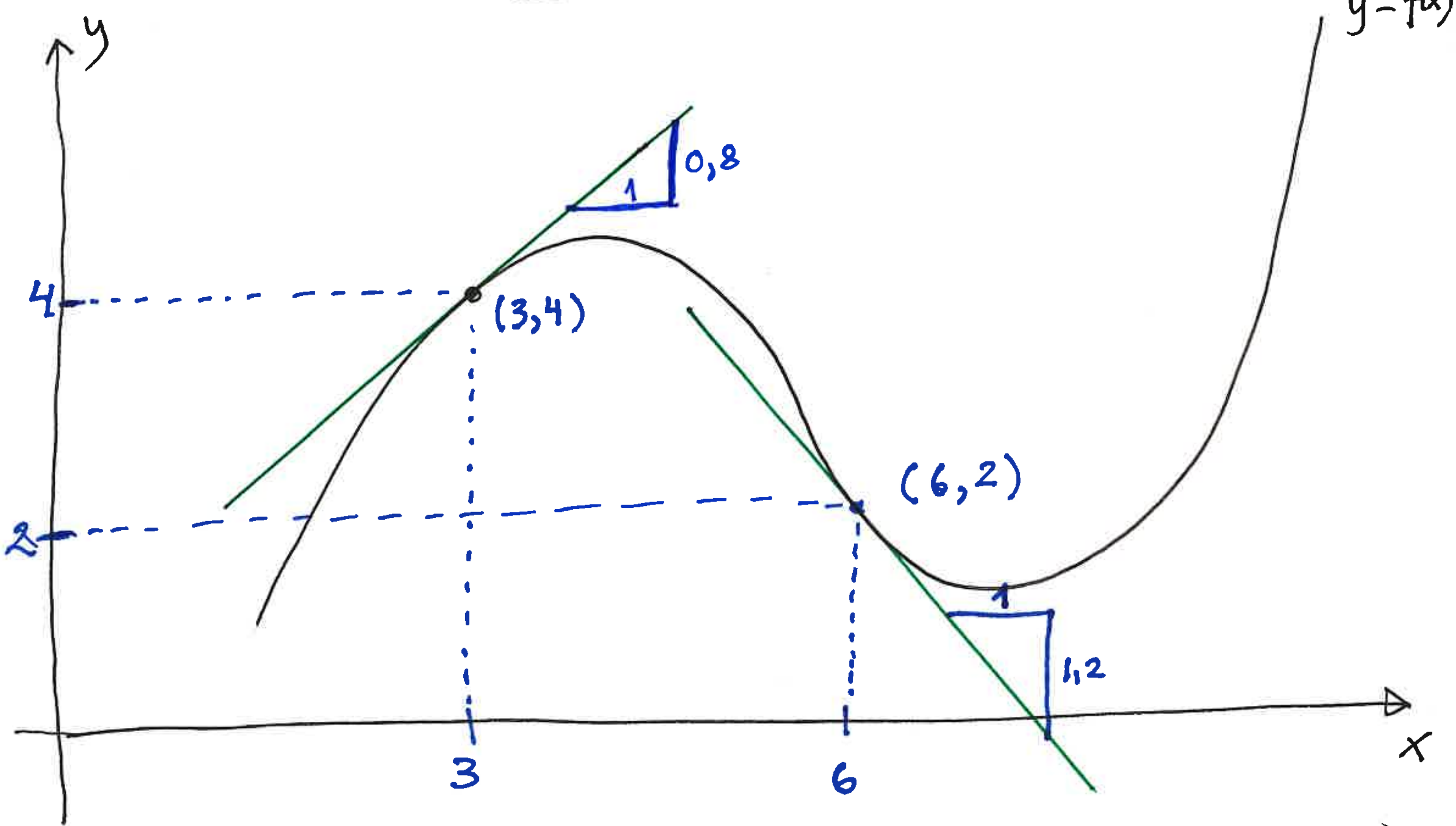
$$e^{\ln(x-3)} < e^{-2}$$

dvs $\quad x-3 < e^{-2}$

dvs $\quad x < 3 + e^{-2}$

dvs $\quad \underline{\underline{x \in \langle 3, 3+e^{-2} \rangle}}$

2. Tangenter og den deriverte



I punktet (3, 4) har tangenten til f(x) stigningstall 0,8.

Vi skriver $f'(3) = 0{,}8$

I punktet (6, 2) har tangenten til f(x) stigningstall −1,2

Vi skriver $f'(6) = -1{,}2$

To viktige bruksområder

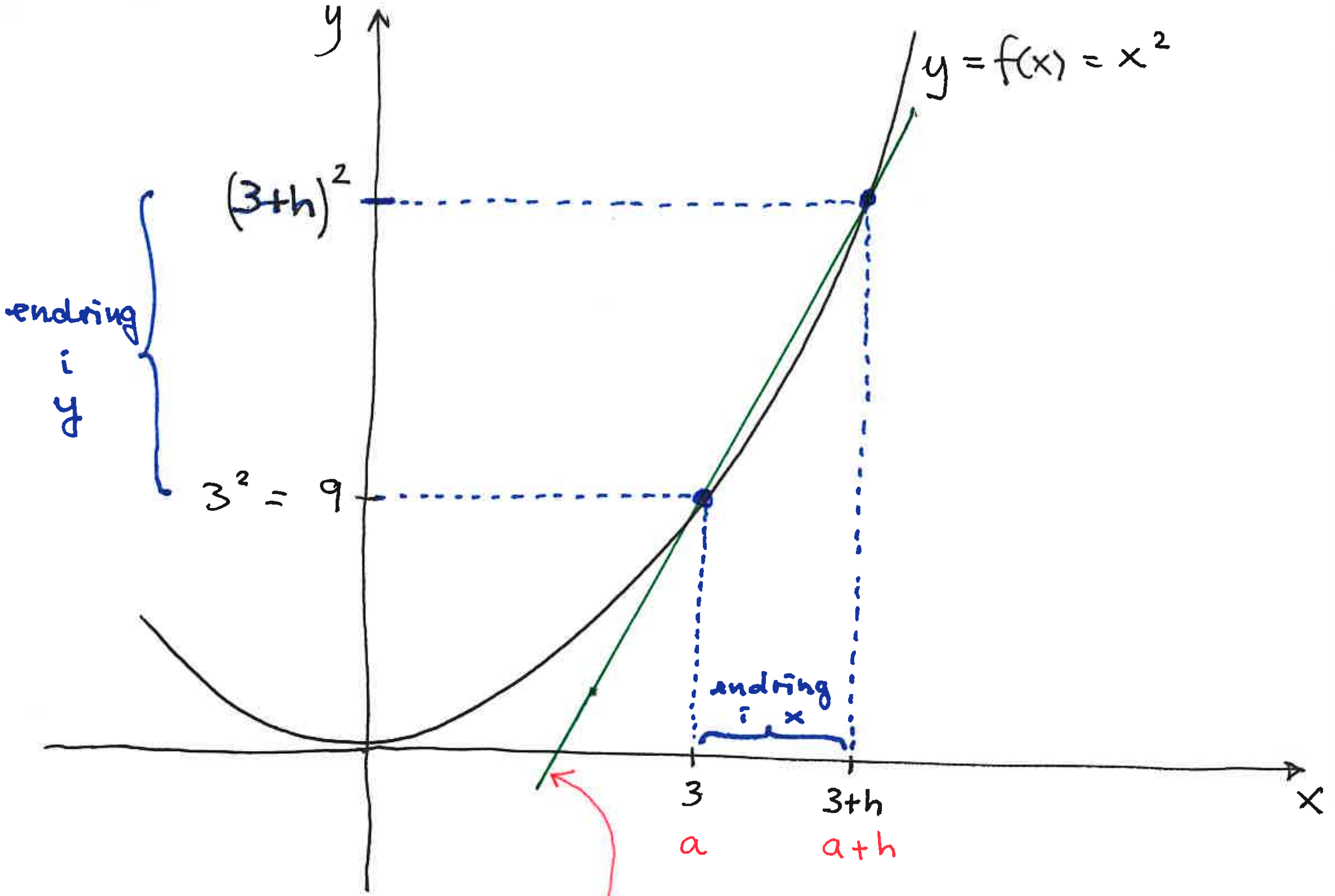
1) Finne hvor funksjonen vokser og avtar og hvor maksimum og minimum er

2) Tilnærme kompliserte funksjoner med lineære funksjoner

- matematiske modeller i økonomi er ofte lineære.

Hvordan finner vi stigningstallet til tangenten?

Eks: $f(x) = x^2$. Hva er stig. tallet til tangenten gjennom (3, 9)



$$\text{Stigningstallet til } \underline{\text{sekanten}} = \frac{\text{endring i } y}{\text{endring i } x}$$

$$= \frac{\overset{(a+h)^2}{(3+h)^2} - 9}{h} = \frac{\overset{(a+h)(a+h)}{(3+h)(3+h)} - 9}{h} = \frac{\overset{a^2}{9} + \underset{2a}{6}h + h^2 - \overset{a^2}{9}}{h}$$

$$= \frac{\overset{2ah+h^2}{6h+h^2}}{h} = \frac{h(\overset{2a+h}{6+h})}{h} = \overset{2a+h}{6+h} \xrightarrow[h \to 0]{h \to 0} \overset{2a}{6}$$

som derfor er stigningstallet til tangenten

til $f(x)$ i $(3, 9)$.

Vi skriver $f'(3) = 6$

3. Den deriverte som funksjon

Hvis vi setter $x = a$ i stedet for $x = 3$

får vi $f'(a) = 2a$

– den deriverte er en funksjon!

$$f'(x) = 2x$$

Eks: Stigningstallet til tangenten til $f(x) = x^2$ i punktet $(-3, 9)$ er $f'(-3) = 2 \cdot (-3) = \underline{\underline{-6}}$.

Vi kunne gjøre det samme med $f(x) = x^3$

Får (etter litt mer regning) $f'(x) = 3 \cdot x^2$

4. Derivasjonsregler

Potensregelen: $\boxed{f(x) = x^n \text{ gir } f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$

NB: gjelder for alle tall n

Eks: $f(x) = x^{10}$ gir $f'(x) = 10 \cdot x^9$

Eks: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ gir

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}}$$

Addisjonsregelen: Hvis $f(x) = g(x) + h(x)$

så er $f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Eks: $f(x) = x + x^3$ gir $f'(x) = 1 + 3x^2$

Konstantregelen: Hvis k er et (konstant) tall

og $f(x) = k \cdot g(x)$, så er

$f'(x) = k \cdot g'(x)$

Eks: $k = 7$ og $g(x) = x^2$ gir $f(x) = 7 \cdot x^2$

og $f'(x) = 7 \cdot 2x = 14x$

Produktregelen: Hvis $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

så er $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Eks: $f(x) = (5x^3 - 2x + 1) \cdot (3x + 7)$

skal finne $f'(x)$ v.h.a. produktregelen.

setter $g(x) = 5x^3 - 2x + 1$ og $h(x) = 3x + 7$

$h'(x) = 3 \cdot 1 + 0 = 3$

$g'(x) = 5 \cdot 3 \cdot x^2 - 2 \cdot 1 + 0$

$= 15x^2 - 2$

husk paranteser!

så $f'(x) = (15x^2 - 2) \cdot (3x + 7) + (5x^3 - 2x + 1) \cdot 3$

$\overset{\text{regner}}{=} \underline{60x^3 + 105x^2 - 12x - 11}$

Brøkregelen: Anta $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

Da er $f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$

Eks: $f(x) = \frac{3x+1}{2x+5}$. Finner $f'(x)$ ved å bruke brøkregelen. Setter

$g(x) = 3x+1$ og $h(x) = 2x+5$

får $g'(x) = 3$ og $h'(x) = 2$

Da er $f'(x) = \frac{3 \cdot (2x+5) - (3x+1) \cdot 2}{(2x+5)^2}$

husk parantesene!

$$= \frac{\cancel{6x} + 15 - (\cancel{6x} + 2)}{(2x+5)^2} = \frac{13}{(2x+5)^2}$$

oftest er det best ikke å regne ut nevneren!

Kjerneregelen:

Hvis $f(x) = g(\underbrace{u(x)}_{\text{kjernen, eller den indre funksjonen}})$

den ytre funksjonen

så er $f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$

EKS: $f(x) = (x^2+2)^{10}$. Beregner $f'(x)$ ved å bruke kjerneregelen med

$u(x) = x^2+2$ og $g(u) = u^{10}$

$u'(x) = 2x$ og $g'(u) = 10u^9$

Da er
$$f'(x) = 10u^9 \cdot 2x$$
$$= 10(x^2+2)^9 \cdot 2x$$
$$= \underline{\underline{20x(x^2+2)^9}}$$

To viktige funksjoner:

$f(x) = e^x$ og $g(x) = \ln(x)$

$f'(x) = e^x$ og $g'(x) = \frac{1}{x}$

Oppg: Finn $f'(x)$.

a) $f(x) = e^{1{,}023x}$

b) $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$

c) $f(x) = \sqrt{e^x+9}$

d) $f(x) = [\ln(x)]^2$.

Svar: a) $f'(x) = 1{,}023 \cdot e^{1{,}023x}$

kjerner.
$u'(x) = 1{,}023x$

b) $f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x$

produkt.

c) $f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x + 9}}$

kjerner.
$u(x) = e^x + 9$

d) $f'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$

kjerner.
$u(x) = \ln(x)$