MET1181, 10. forelesning, 14. okt. 2019, Runar Ile

1. Omvendte funksjoner — kap. 3.11
2. Eksponentialfunksjoner — 3.12
3. Logaritmer — 3.13

## 1. Omvendte funksjoner

- funksjonstabellen
- uttrykket
- grafen

<u>Eks</u>: $f(x) = (x-3)^2$ med $D_f = [3, \rightarrow)$ $(x \geq 3)$

Funksjonstabell:

| $x$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $g(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | $x$ |

← den omvendte funksjonen

så $g(0) = 3$, $g(1) = 4$, $g(4) = 5$ osv.

Dermed er

$f(g(0)) = f(3) = 0$ og $g(f(3)) = g(0) = 3$

$f(g(1)) = f(4) = 1$ og $g(f(4)) = g(1) = 4$

$f(g(4)) = f(5) = 4$ og $g(f(7)) = g(16) = 7$

Definisjon: $f(x)$ med definisjonsmengde $D_f$ og
$g(x)$ med — " — $D_g$

er omvendte funksjoner hvis

$f(g(x)) = x$ for alle $x$ i $D_g$ og $g(f(x)) = x$ for alle $x$ i $D_f$

<u>Oppg</u>: Vis at $f(x) = \sqrt{x-1}$ med $D_f = [1, \rightarrow\rangle$ $(x \geq 1)$
og $g(x) = x^2+1$ med $D_g = [0, \rightarrow\rangle$ $(x \geq 0)$
er omvendte funksjoner.

Løsning: Legger merke til at er (f.eks.) at

$g(-3) = (-3)^2 + 1 = 9+1 = 10$

$f(10) = \sqrt{10-1} = \sqrt{9} = 3$ så

$f(g(-3)) = 3$ – ikke bra...?

Men $-3$ er ikke i $D_g$, så det gjør ikke noe.

For alle tall $x$ er $f(g(x)) = \sqrt{g(x) - 1}$

$= \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = |x|$ og for

$x \geq 0$ er $|x| = x$ så ok.

For $x \geq 1$ er $g(f(x)) = f(x)^2+1 = (\sqrt{x-1})^2+1 = x-1+1 = x$
– ok.

Hvordan finne uttrykket for den omvendte funksjonen?

---

① Løser likningen $y = f(x)$ for $x$.

② Bytter variablene $x$ og $y$.

③ Setter $D_g = V_f$ og finner den

**Eks:** $f(x) = (x-3)^2$ med $D_f = [3, \rightarrow\rangle$

① Løser likningen $y = (x-3)^2$ for $x$.

- tar kvadratroten på b.s.

$$\sqrt{y} = \sqrt{(x-3)^2}$$

dvs $\sqrt{y} = |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{for } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{for } x \leq 3 \end{cases}$

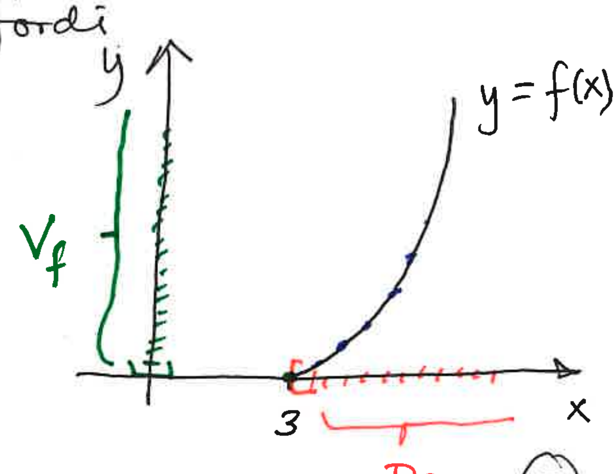
Så $\sqrt{y} = x - 3$ for $x$ i $D_f = [3, \rightarrow\rangle$.

dvs $x = 3 + \sqrt{y}$

② Bytter variablene: $y = g(x) = 3 + \sqrt{x}$

③ $D_g = V_f = [0, \rightarrow\rangle$ fordi

$f(x) = (x-3)^2 = y$ har løsning for $x$ for alle $y \geq 0$.



OPPG: La $f(x) = (x-3)^2$ med $D_f = \langle \leftarrow, 3]$ $(x \leq 3)$

Bestem uttrykket $g(x)$ og $D_g$ for den omv. funksj.

Løsning:

① Løser likningen $y = (x-3)^2$

– tar kvadratroten på b.s.

$$\sqrt{y} = |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{for } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{for } x \leq 3 \end{cases}$$

Fordi $D_f = \langle \leftarrow, 3]$ er $\sqrt{y} = -x+3$

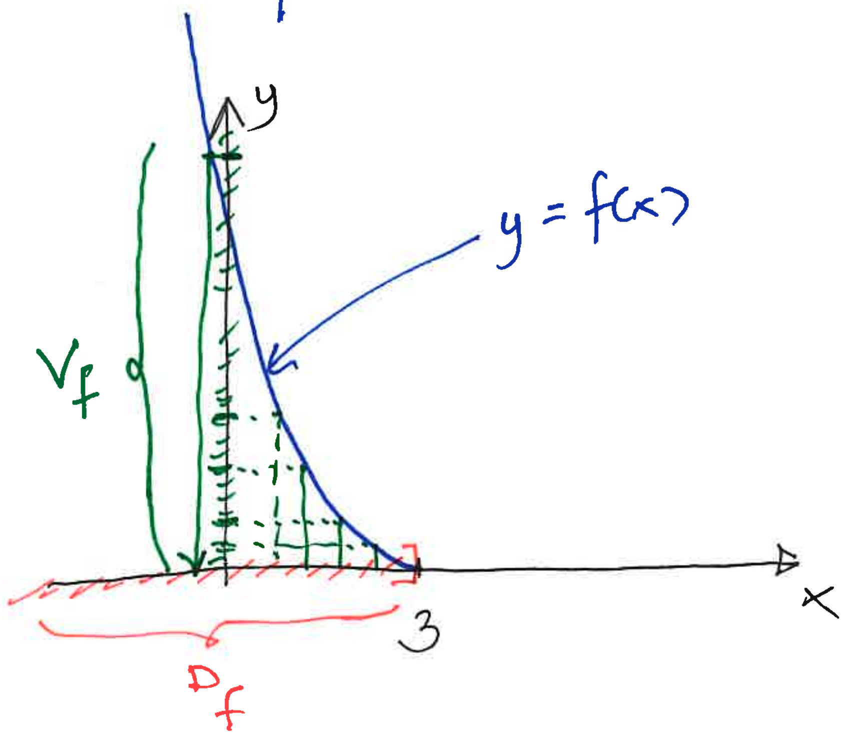
dvs $x = 3 - \sqrt{y}$

② Bytter variabler: $y = g(x) = 3 - \sqrt{x}$

③ $D_g = V_f = [0, \rightarrow\rangle$ fordi

$f(x) = (x-3)^2 = y$ har løsning for $x$ med

$x \leq 3$ for alle $y \geq 0$.

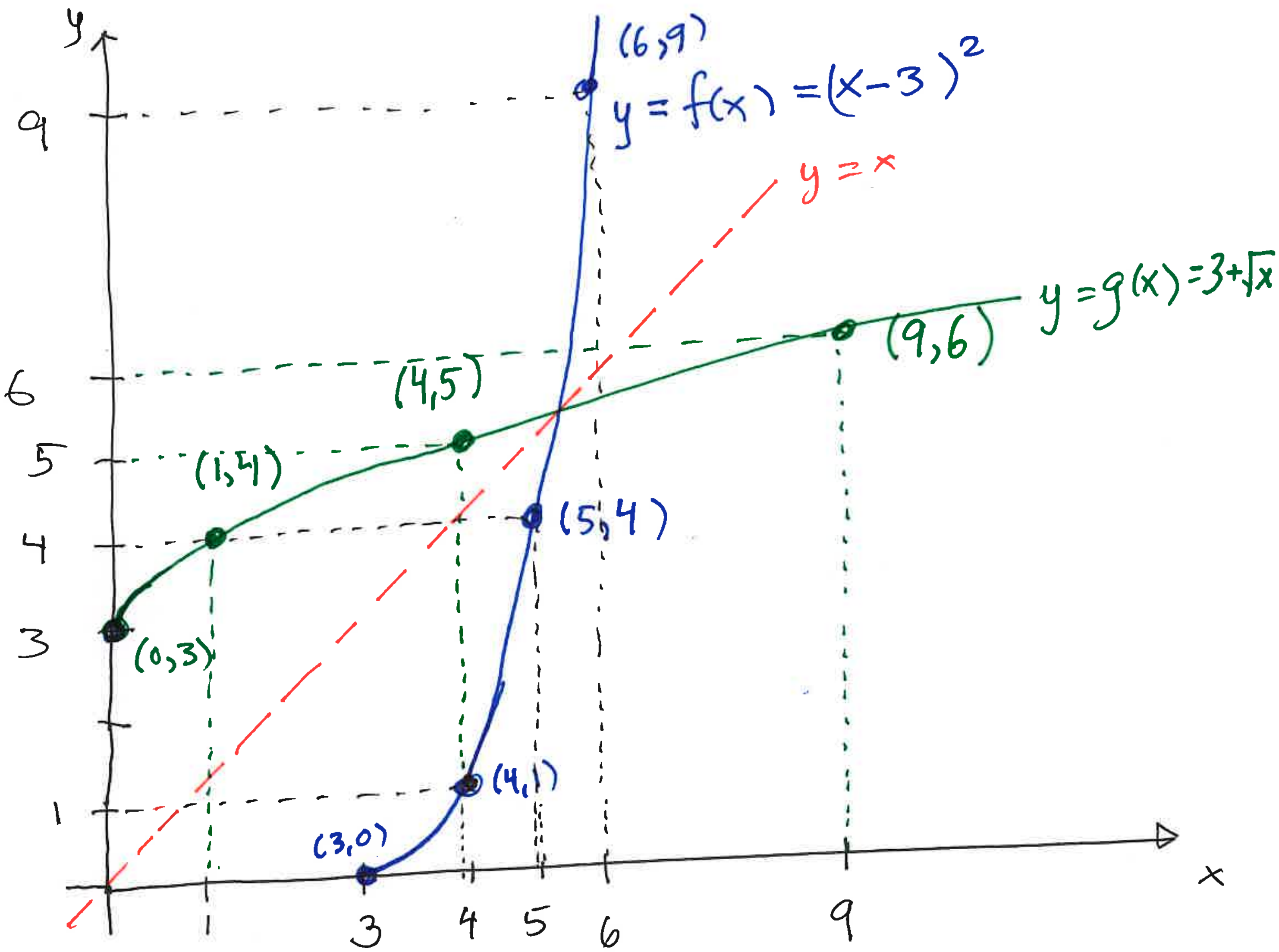


## Grafen til den omvendte funksjonen

– er speilbildet av grafen til $f(x)$.
om „diagonalen" $y = x$

**Eks:** $f(x) = (x-3)^2$ med $D_f = [3, \rightarrow\rangle$

| $x$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $g(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | $x$ |



**Oppg**: La $f(x) = (x-3)^2$ med $D_f = \langle \leftarrow, 3]$.

Tegn skisser av grafene til $f(x)$ og den omvendte funksjonen $g(x)$ i samme koordinatsystem.

**Løsning:**

| $x$ | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 | $g(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | $x$ |

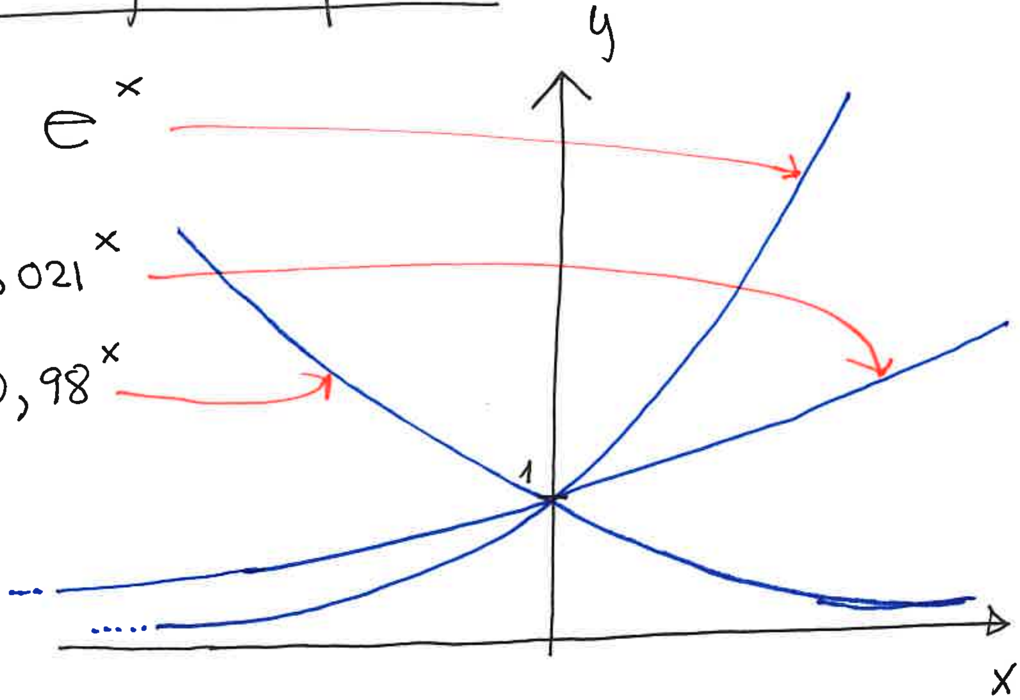
$g(x) = 3 - \sqrt{y}$ (se Invers2.ggb)

## 2. Eksponentialfunksjoner

**Eks**: $f(x) = e^x$

$f(x) = 1{,}021^x$

$f(x) = 0{,}98^x$




$\underline{a > 1}$: $f(x) = a^x$ strengt voksende

og $a^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0^+$

$\underline{0<a<1}$: $f(x) = a^x$ strengt avtagende

og $a^x \xrightarrow[x \to \infty]{} 0^+$

(a er alltid positiv).

Oppg: Kåre setter inn 4000 på konto med 1,2% rente. Finn funksjonsuttrykket f(x) som gir balansen etter x år hvis det er

a) årlig forrentning

b) kontinuerlig forrentning

Svar: a) $f(x) = 4000 \cdot 1{,}012^x$

b) $f(x) = 4000 \cdot (e^{0{,}012})^x$

$= 4000 \cdot e^{0{,}012 \cdot x}$

Potensregler: $f(x) = a^x$ så vil

$$f(x) \cdot f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y} = f(x+y)$$

og $$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a^x} = a^{-x} = f(-x).$$

## 3. Logaritmer

Anta $a > 0$ og $a \neq 1$. *a kalles grunntallet*

Da er $g(x) = \log_a(x)$ den omvendte funksjonen til $f(x) = a^x$ og $D_g = V_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$

**Eks:** $a = 2$, $\log_2(10)$ = tallet som 2 må opphøyes i for å få 10

$? = \log_2(10) = 3{,}322$

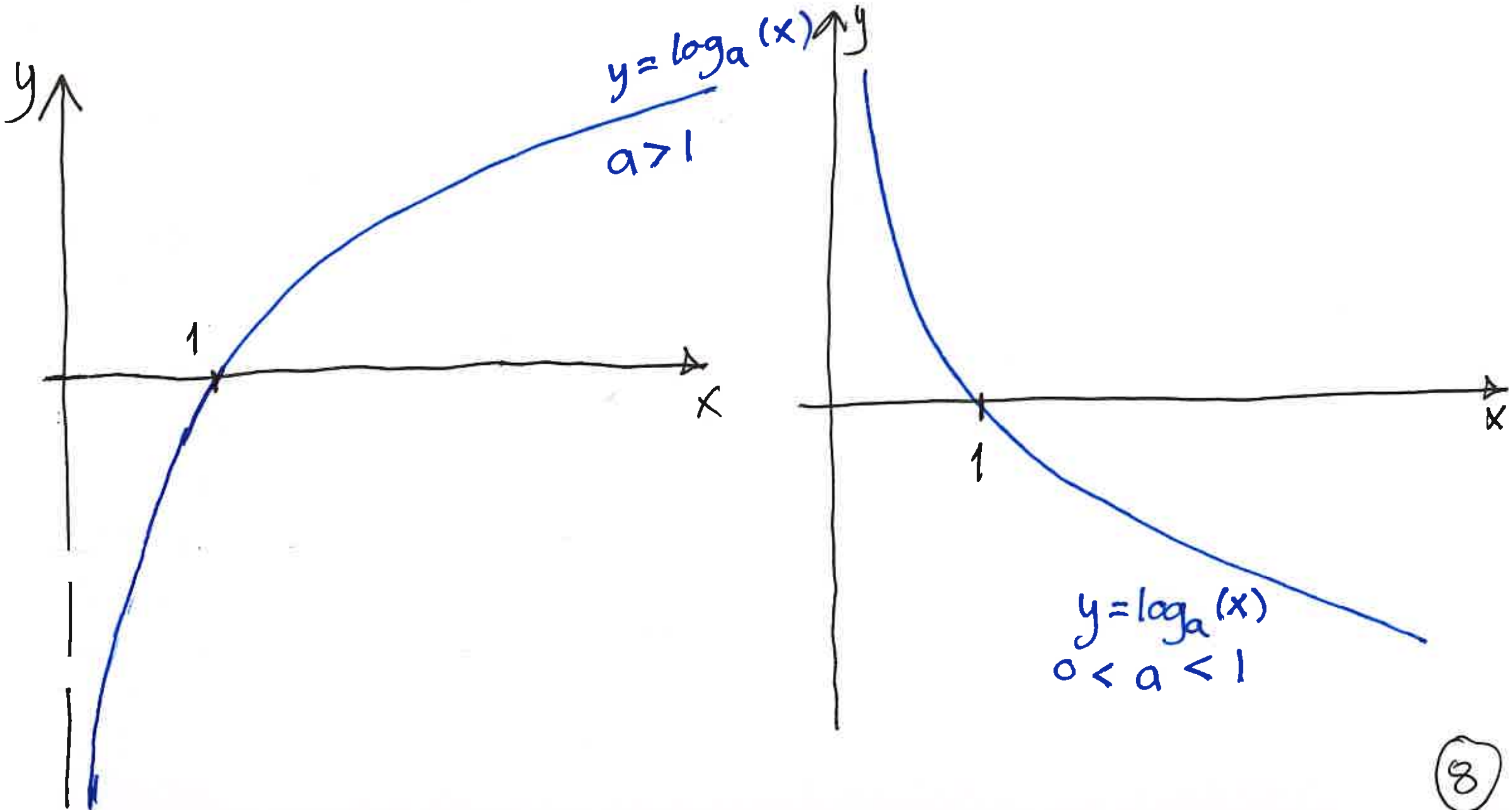
| $x$ | $?$ | $4$ | $-1$ | $0$ | $\log_2(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2^x$ | $10$ | $16$ | $0{,}5$ | $1$ | $x$ |

dvs $2^{\log_2(10)} = 10$

Fordi $2^{3{,}322} = 10{,}00$ er $\log_2(10) \approx 3{,}322$

**Oppg:** Beregn $\log_2(16)$ og $\log_2(0{,}5)$ og $\log_2(1)$.

Løsning: Fordi $2^4 = 16$ er $\log_2(16) = 4$. Fordi $2^{-1} = \frac{1}{2}$ er $\log_2(0{,}5) = -1$. Fordi $2^0 = 1$ er $\log_2(1) = 0$



**Eks:** $\log_2 10 = 3{,}322$ fordi $2^{3{,}322} = 10$

$\log_2 7 = 2{,}807$ $\quad 2^{2{,}807} = 7$

Da er $2^{3{,}322+2{,}807} = 2^{3{,}322} \cdot 2^{2{,}807} = 10 \cdot 7 = 70$

Altså er $\log_2(10 \cdot 7) = \log_2(10) + \log_2(7)$

Generelt: ① $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

② $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

③ $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$

Eks: $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(1) - \log_2(2) = 0 - 1 = -1$

$\log_2(2^4) = 4 \cdot \log_2(2) = 4 \cdot 1 = 4$

$$\boxed{\text{\underline{Definisjon}:} \quad \ln(x) = \log_e(x) \qquad e = \text{Eulers tall}}$$

– kalles den <u>naturlige</u> logaritmen.

Eks: $\ln(\sqrt[10]{e}) = \ln\left(e^{\frac{1}{10}}\right) = \frac{1}{10} \cdot \ln(e)$

$= \frac{1}{10} \cdot 1 = \frac{1}{10}$