Plan:

1. Om eksamen
2. Gjennomgang: Eksamen 05/2018.

* Oppgaveveiledning: Jeg er i D1-080 $\boxed{\text{torsdag fra kl 11.}}$ Er på kontoret hver dag frem til eksamen. Skriv på epost om dere ikke finner meg / døren er låst: $\boxed{\text{eivind.eriksen@bi.no}}$

* Husk å fylle ut kursevaluering, som er sendt ut i forrige uke.

1

Eksamen	MET 11807 Matematikk for siviløkonomer
Dato	29. mai 2019 kl 0900 - 1400

Eksamensoppgaven består av 15 delspørsmål med samme vekt, som har maksimal score 6p hver og totalt har maksimal score 90p (100%). I tillegg inneholder eksamensoppgaven et bonus-spørsmål som man ikke trenger besvare, men som kan gi opptil 6p ekstra score.

Alle svar skal begrunnes. Når besvarelsen evalueres, blir det lagt vekt på at framgangsmåte og resultat presenteres så klart, presist og kortfattet som mulig.

Oppgave 1.

a) **(6p)**

b) **(6p)**

c) **(6p)**

Oppgave 2.

a) **(6p)**

b) **(6p)**

c) **(6p)**

Oppgave 3.

a) **(6p)**

b) **(6p)**

c) **(6p)**

Oppgave 4.

a) **(6p)**

b) **(6p)**

c) **(6p)**

Oppgave 5.

a) **(6p)**

b) **(6p)**

c) **(6p)**

Oppgave 6.
Bonus (6p)

Kap 5-7 er hoved-temaer

Temaer:

Integrasjon } fagoppgave
Matriser
Flere variable
- max/min
- uten bibetingelser
  - stasjonære pkt
  - klassifisere
  (- globalt maks/min)
- med bibetingelser
  - Lagrange
  - nivåkurver

- Finansmatematikk
- Funksjoner og grafer

Minimum forberedelse:

- fagoppgaven
- de siste eksamensoppgavene

Eksamensresultat

MET11803 Matematikk for siviløkonomer, 30/05/2018

Statistikk

Andel A-B	15.5%
Andel F	25.6%
Gjennomsnitt	52.2% (D)

Kommentarer

Eksamensresultatene var blandede, men generelt bedre enn i fjor. Oppgave 2-3 og Oppgave 5 ble besvart godt. Oppgave 1 (drøfting av funksjon i én variabel), Oppgave 3d (matrisemultiplikasjon), og Oppgave 4 (partiell derivasjon og optimering av funksjon i to variable) ble besvart dårligere enn forventet, og trakk resultatene ned.

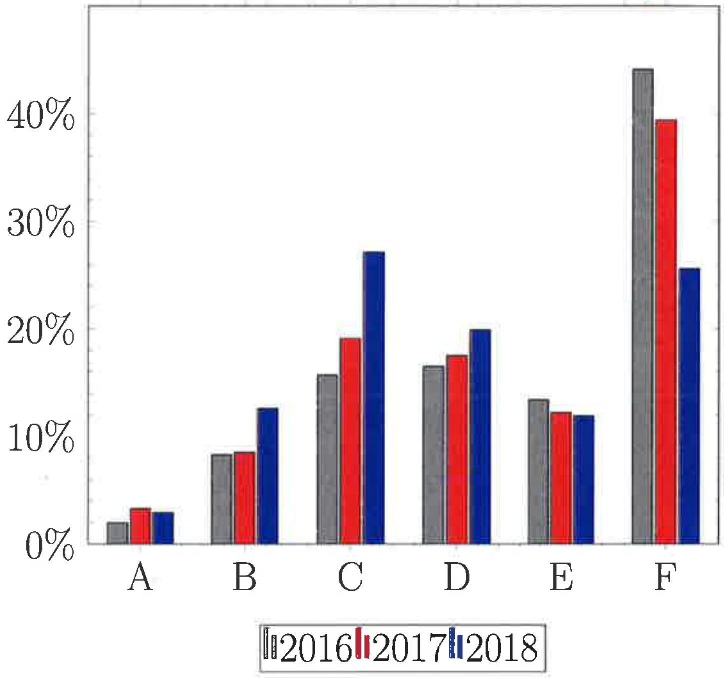
Begrunnelsene, og måten oppgavene var ført på, trakk også ned resultatene. I mange tilfeller henvises det ikke til relevante metoder og relevant teori, og resultater gis uten forklaring. Riktige svar uten begrunnelse gav liten eller ingen uttelling ved sensuren.

Gjennomsnittlig score per oppgave

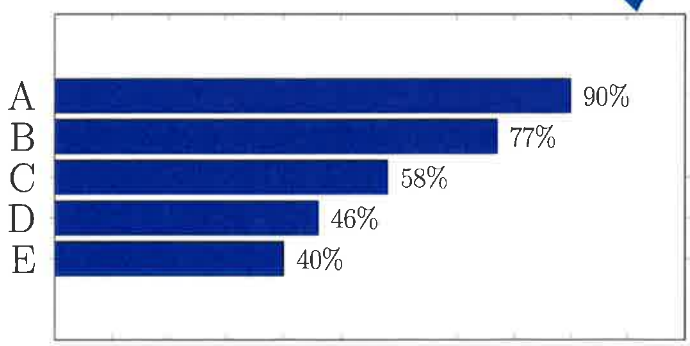
- Oppgave 1: a) 63% b) 39% c) 28% d) 48%
- Oppgave 2: a) 75% b) 81% c) 40%
- Oppgave 3: a) 84% b) 91% c) 72% d) 17%
- Oppgave 4: a) 36% b) 11%
- Oppgave 5: a) 60% b) 63% c) 20%
- Oppgave 6: 8% (bonusoppgave)

For detaljert løsning av eksamensoppgavene, vises det til løsningsforslaget som finnes på www.dr-eriksen.no.

Karakterfordeling



Karaktergrenser



LaTeX TikZposter

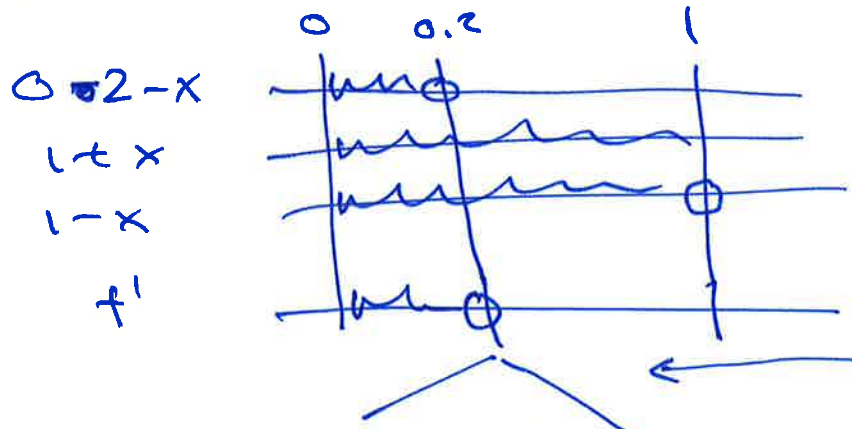
Eksamen 05/2018:

1. $f(x) = 0.6 \cdot \ln(1+x) + 0.4 \cdot \ln(1-x)$, $0 \leq x < 1$

a) Maks: $f' = \frac{0.6}{1+x} + \frac{0.4}{1-x} \cdot (-1)$

$$= \frac{0.6 \cdot (1-x) - 0.4(1+x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{0.2 - x}{(1+x)(1-x)}$$

$f' = 0$: $x = 0.2$ $\quad x^* = 0.2$



$x^* = 0.2$ er maks. pkt.

$f(x^*) = f(0.2) \simeq 0.02$ er maksverdi.

b) Konveks/konkav: $\left(\frac{1}{u}\right)'_u = -\frac{1}{u^2}$

$$f'' = -\frac{0.6}{(1+x)^2} - \left(-\frac{0.4}{(1-x)^2} \cdot (-1)\right)$$

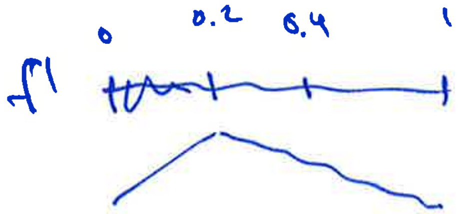
$$= -\frac{0.6}{(1+x)^2} - \frac{0.4}{(1-x)^2} < 0 \text{ for alle } x$$

$\Downarrow$

$\boxed{f \text{ konkav}}$

$\cap$

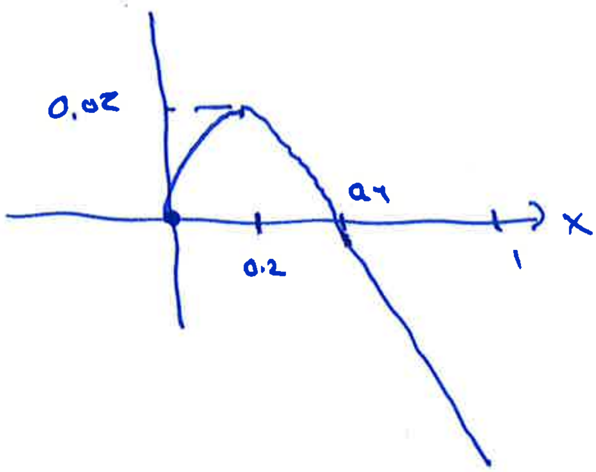
c) $\underline{f(x) < 0 \quad \text{når} \quad x > 2x^*}$: $2x^* = 2 \cdot 0.2 = \underline{0.4}$



$$f(0.4) = 0.6 \cdot \ln 1.4 + 0.4 \ln 0.6$$
$$\simeq \cancel{0.2026}\ 0.2018 - 0.2043$$
$$\simeq -0.0025 < 0$$

$f(0.4) < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ for $x > 0.4$ siden f er avtagende for $x \geq 0.4$

d)



$$f(x) = 0.6 \ln(1+x) + 0.4 \ln(1-x)$$

$\underline{2.}$

a) $\int x\sqrt{x}\, dx = \int x^{3/2}\, dx = \underline{\frac{2}{5} x^{5/2} + C}$

$= \underline{\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C}$

b) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x-4}\, dx = \int \frac{\cancel{2x-3}}{u} \cdot \frac{du}{\cancel{2x-3}} = \int \frac{1}{u}\, du$

$u = x^2 - 3x - 4$
$du = (2x-3)\, dx$

$= \ln|u| + C$
$= \underline{\ln|x^2-3x-4| + C}$

Delbrøksoppspalting:

$$\frac{2x-3}{x^2-3x-4} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1} \quad \Big| \cdot (x-4)(x+1)$$

$x^2-3x-4=0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(-4)}}{2} = \frac{3\pm 5}{2} = 4, -1$$

$x^2-3x-4 = (x-4)(x+1)$

$2x-3 = A\cdot(x+1) + B(x-4)$

$x=-1:\quad -5 = B\cdot(-5) \qquad \underline{B=1}$

$x=4:\quad 5 = A\cdot 5 \qquad \underline{A=1}$

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x-4}\,dx = \int \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \underline{\underline{\ln|x-4| + \ln|x+1| + C}} = \ln|(x-4)(x+1)| + C$$

c) $\int \ln\sqrt{x}\,dx$

$$= \int \ln x^{1/2}\,dx = \int \tfrac{1}{2}\cdot \ln x\,dx$$

$u = x/2 \quad v = \ln x$

$u' = 1/2 \quad v' = 1/x$

$$= \tfrac{1}{2}x\cdot\ln x - \int \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \underline{\underline{\tfrac{1}{2}x\ln x - \tfrac{1}{2}x + C}}$$

$\int \ln x\,dx$

$= \int 1\cdot \ln x\,dx$

delvis

$$\int \ln\sqrt{x}\,dx = \int 1\cdot \ln(\sqrt{x})\,dx$$

$u = x \quad v = \ln(\sqrt{x})$

$u' = 1 \quad v' = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$

$$= x\cdot\ln(\sqrt{x}) - \int x\cdot\frac{1}{2x}\,dx$$

$$= \underline{\underline{x\ln(\sqrt{x}) - \tfrac{1}{2}x + C}}$$

3. $A\cdot \underline{x} = \underline{b}$ der $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ -a \end{pmatrix}$

a) $a=1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \Big]{-2} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \Big]{1}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

z fri: $x+y+z=1$
$y+2z=-1$

$y = -1-2z$

$x = 1-y-z$
$= 1-(-1-2z)-z$
$= 2+z$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Løsning:} \\ (x,y,z) = (2+z, -1-2z, z) \\ \quad\text{med } z \text{ fri}\end{array}}$$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(2-a^2) - a(2a-0)$
$= 4-2a^2-2a^2 = 4-4a^2$
$= 4(1-a^2) = 4(1+a)(1-a)$

$|A|=0$ når $a=1,\ a=-1$

c) $A\underline{x}=\underline{b}$ uendelig mange løsninger:
$a \neq \pm 1$: én løsning siden $|A| \neq 0$
$a=1$: uendelig mange løsn. (se a))
$a=-1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \Big]{2} \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

ingen løsn

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Konkl: $\boxed{\begin{array}{c} A\underline{x} = \underline{b} \text{ har uendelig mange løsn.} \\ \Uparrow \\ \underline{\underline{a=1}} \end{array}}$

d) Regn ut $\underline{x}^T A \underline{x}$ når $a=1$:

$$\underbrace{(x \;\; y \;\; z) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y & x+y+z & y+2z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \Big((2x+y)x + (x+y+z)\cdot y + (y+2z)z\Big)$$

$$= \underline{\underline{\left(2x^2+2xy+y^2+2yz+2z^2\right)}}$$

Opps. 5: min $f = x^2 + y^2 - 4y$ når $\underbrace{2x + y^2 = -1}_{\text{b.i.bet.} = \text{tillatte punkt.}}$

a) $2x + y^2 = -1$:

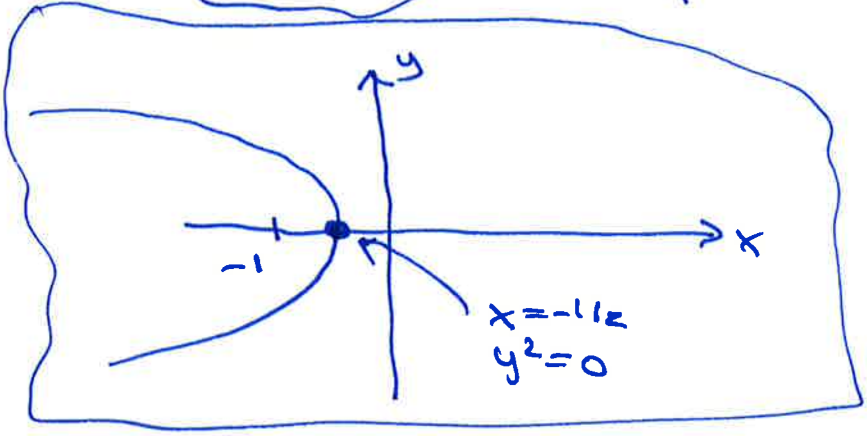
parabel $y = x^2$

$y^2 = -1 - 2x$

$-1 - 2x \geq 0$

$-2x \geq 1$

$x \leq -1/2$



$y = \pm\sqrt{-1-2x}$ når $x \leq -1/2$

Er kurven begrenset:

Nei, fordi det er ingen nedre grense for x.

b) $L = x^2 + y^2 - 4y - \lambda(2x + y^2)$

$$\boxed{\begin{aligned} L'_x &= 2x - \lambda \cdot 2 = 0 \\ L'_y &= 2y - 4 - \lambda \cdot 2y = 0 \\ & 2x + y^2 = -1 \end{aligned}}$$

Lagrange-betingelsene.

$\boxed{\lambda = x}$

① $2x = 2\lambda \Rightarrow \boxed{x = \lambda}$

② $\dfrac{2y - 4}{2y} = \dfrac{\cancel{2y} \cdot x}{\cancel{2y}}$

$x = \dfrac{2y-4}{2y} = \boxed{\dfrac{y-2}{y}}$

③ $2x + y^2 = -1$

$2\left(\frac{y-2}{y}\right) + y^2 = -1 \quad | \cdot y$

$2(y-2) + y^3 = -y$

$y^3 + 3y - 4 = 0$ ← ser at $y=1$ er løsn.

$(y-1)(y^2+y+4) = 0$

$$\begin{array}{l} y^3 + 3y - 4 : y-1 = y^2+y+4 \\ -(y^3 - y^2) \\ \quad y^2 + 3y - 4 \\ \quad -(y^2 - y) \\ \qquad 4y - 4 \\ \qquad 4y - 4 \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

$y=1$ eller $y^2 + y + 4 = 0$

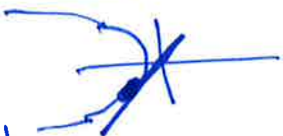
$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 4}}{2}$ ingen fl. løsn.

Løsn: $y=1$ $x=-1$ $\lambda=-1$

Konk: En løsn av Lagrange betingelsene: $(x,y;\lambda) = (-1,1;-1)$ ← kand. for min

$f = -2$

c) Merk: $2x + y^2 = -1$ ikke begrenset

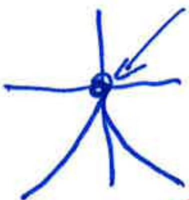


Hvis den hadde vært begrenset:

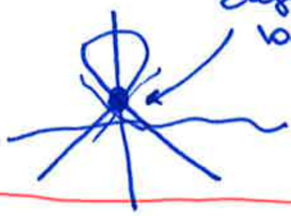
i) Ekstremverdisetn. $\Rightarrow$ fins eks.

ii) Minimum må være
- ordinært kandidatpkt $(-1,1;-1)$
- degenerert bibetingelse

Eks på degenerert bibetingelse:



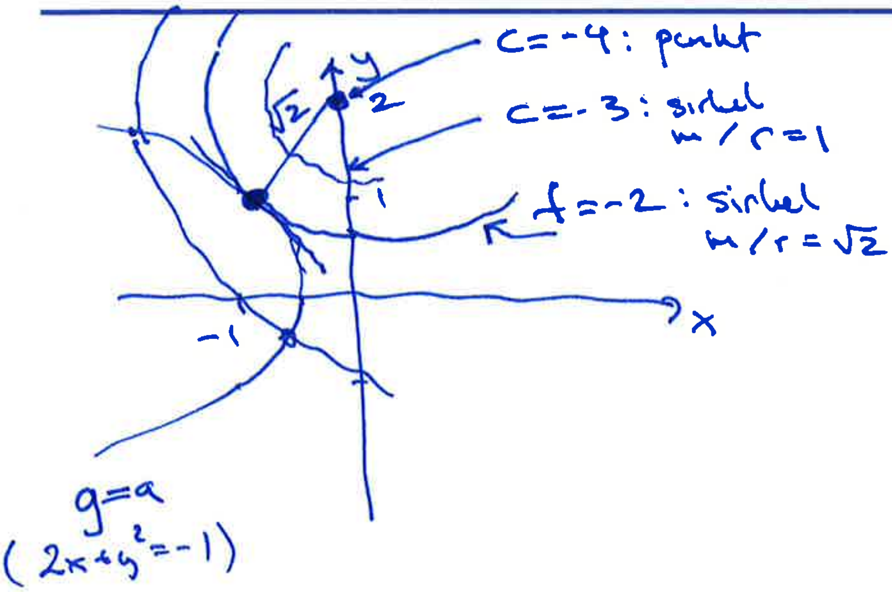
degenert $g'_x = 0$, $g'_y = 0$



degenerert bibetingelse

degenerert bibetingelse = ikke entydig tangent i punktet

Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/



Kandidatpkt:

$(x, y ; \lambda) = (-1, 1 ; -1) \quad f = -2$

Nivåkurve:

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4y = -2$

$x^2 + y^2 - 4y + 4 = -2 + 4$

$x^2 + (y-2)^2 = 2$

Andre nivåkurver:

$f(x,y) = c$

$x^2 + y^2 - 4y + 4 = c + 4$

$x^2 + (y-2)^2 = c + 4$

Sirkel med sentrum $(0,2)$ og radius $\sqrt{c+4}$

$(c \geq -4)$

$c < -2$

$\Updownarrow$

radius $< \sqrt{2}$

ingen tillatte pkt.

$\Downarrow$

$f_{min} = -2$ i $(-1, 1)$

4. $f(x,y) = (x-y)\, e^{2xy}$

a) $f'_x = 1 \cdot e^{2xy} + (x-y)\, e^{2xy} \cdot 2y$

$= \underline{e^{2xy}\left(1 + (x-y)\cdot 2y\right)}$

$f'_y = -1 \cdot e^{2xy} + (x-y)\cdot e^{2xy} \cdot 2x$

$= \underline{e^{2xy}\left(-1 + (x-y)2x\right)}$

$f'_x = 0$: $e^{2xy}(1 + \cancel{2x}\ 2xy - 2y^2) = 0$

$f'_y = 0$: $e^{2xy}(-1 + 2x^2 - 2xy) = 0$

$1 + 2xy - 2y^2 = 0$

$-1 + 2x^2 - 2xy = 0$

$2x^2 - 2y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2$

$\underline{x = \pm y}$

i) $\underline{x = y}$: $1 + \cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} = 0$ ingen løsn.

ii) $\underline{x = -y}$: $1 - 2y^2 - 2y^2 = 0$

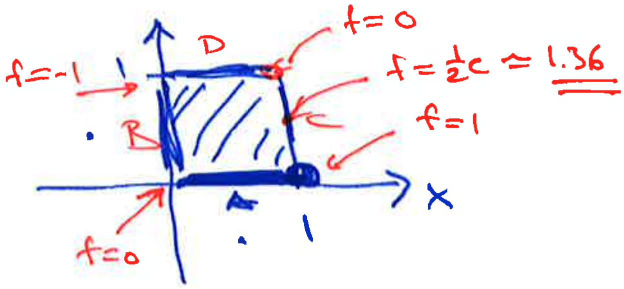
$4y^2 = 1$

$y^2 = 1/4$

$y = \pm\sqrt{1/4} = \pm 1/2$

$\boxed{\text{Løsn: } (x,y) = (1/2, -1/2),\ (-1/2, 1/2)}$

b) max $f(x,y)$ når $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$



Kandidater til max:

i) Indre stasjonære punkt:

~~$(1/2,-1/2),\ (-1/2,1/2)$~~ ingen

ii) Randpkt:

A: $y=0,\ 0 \le x \le 1$:

$f = (x-y)e^{2xy} = xe^0 = x$

$f(1,0) = 1$ størst på A

Ekstremverdisetn:

lukket + begrenset ✓

$\Downarrow$

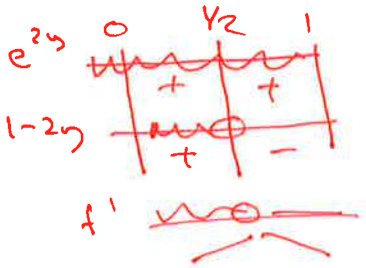
det fins max

Etter forelesn: Regner ut B, C, D også:

B: $x=0,\ 0 \le y \le 1$: $f = -ye^0 = -y \Rightarrow$ størst i $f(0,0)=0$

C: $x=1,\ 0 \le y \le 1$: $f = (1-y)e^{2y}$

$f' = -1e^{2y} + (1-y)e^{2y} \cdot 2$
$= e^{2y}(-1 + 2(1-y)) = e^{2y}(1-2y)$



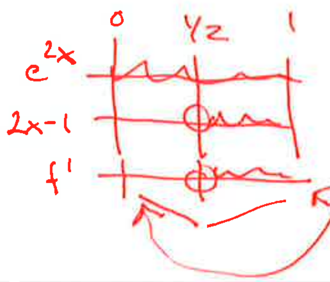
Størst i $(1, 1/2)$

$f(1, 1/2) = \frac{1}{2}e \approx 1.36$

D: $y=1,\ 0 \le x \le 1$:

$f = (x-1)e^{2x}$

$f' = 1 \cdot e^{2x} + (x-1)e^{2x} \cdot 2$
$= e^{2x}(1 + 2(x-1))$
$= e^{2x}(2x-1)$



$f(0,1) = -1$
$f(1,1) = 0$

størst i $f(1,1) = 0$

Konkl:

Det fins maks (ekstremverdisetn.)

Ikke indre stasjonært punkt $\Rightarrow$ må være randpkt.

Størst verdi på A, B, C, D:

$$\boxed{f_{max} = \frac{e}{2} \approx 1{,}36 \quad ; \quad (x,y) = (1, 1/2)}$$