Plan:

1. Lagranges metode
2. Tolkning av Lagrange-multiplikatoren
3. Degenererte bibetingelser
4. Globale maksimums-/minimumspunkter

Pensum: [E] 7.6

Gjennomgåes neste gang.

(a) Veiledning: fredag, men kanskje mulig kl 14. (b) Forelesning 31: Rep. Kap. 7

(c) Rep. forelesning: 22/05 kl 11. (d) Eksamenssett I–III.

Repetisjon: Optimering med bibetingelser $\boxed{\max/\min\ f(x,y) \text{ når } g(x,y)=a}$

Ekstremverdisetningen:

Hvis f er kont. og mengden D av tillatte pkt er lukket og begrenset (=kompakt), så har f maks. og min. på mengden D.

Tillatte pkt = pkt som oppfyller alle bibetingelser

D = mengden av alle tillatte pkt.

Viktige kurver:

i) $ax+by=c$ (rett linje)

ii) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ (sirkel)

iii) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ (ellipse)

iv) $y=a(x-x_0)^2+b$ (parabel)

v) $(x-a)(y-b)=c$ (hyperbel)

Typiske eksempler:

$2x+3y=6$

$x^2+y^2=25$

$x^2+4y^2=16$

$y=2x^2+3$

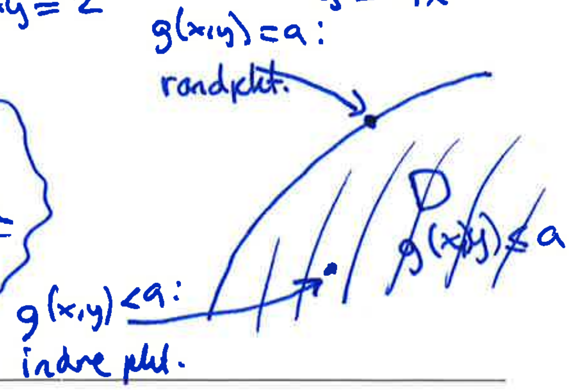
$(x-1)y=1 \iff y=\dfrac{1}{x-1}$

$xy=2$ $\quad y=2/x$

Kandidater til maks/min:

i) Indre pkt som er stasjonært eller kritisk

ii) Randpkt



Viktige metoder:

i) Løse bibetingelsen $g(x,y)=a$ for x eller y og sette inn i $f(x,y)$ → maks/min til funksjon i én variabel uten bibetingelser

Brukes når bibetingelsen er en enkel likning, f. eks. lineær.

$\boxed{\min\ x^2+y^2 \text{ når } x+y=1}$

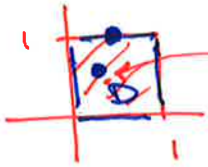
$y=1-x$

$f(x,y)=x^2+(1-x)^2 = 2x^2-2x+1$

ii) Gjennomløpe alle randpkt og sjekke eksplisitt hva som er største/minste verdi.

Brukes når de tillatte pktene har en rand som består av rette linjer, for eksempel kvadrat/rektangel.

$\boxed{\max\ xy \text{ når } 0 \leq x,y \leq 1}$



i) Sjekk stasjonære pkt i det indre

ii) Sjekk hver sidekant:

a) $y=0$ b) $x=0$ c) $y=1$ d) $x=1$

iii) Lagranges metode

Alle tilfeller som er mer kompliserte.

Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/
Handelshøyskolen BI
Økonomi og Ledelse

1 Lagranges metode

Defn: Lagrange problem = optimeringsproblem der alle bibetingelser er likninger.

Vårt tilfelle: $\boxed{\max/\min \underbrace{f(x,y)}_{\text{objektiv-funksjon}} \text{ når } \underbrace{g(x,y)=a}_{\text{bibetingelsen}}}$

Metode:

i) Skriver ned Lagrange-funksjonen

$$\underbrace{\mathcal{L}(x,y;\lambda)}_{} = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$$

λ kalles Lagrange-multiplikatoren.

Merk: $g(x,y)=a$ kan skrives $g(x,y)-a=0$

vi kan derfor skrive

Valgfritt: $\rightarrow \mathcal{L}(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda \cdot (g(x,y)-a)$

ii) Skriver ned førsteordensbetingelser + bibetingelse:

FOC: $\left\{ \boxed{\begin{array}{l} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 0 \end{array}} \right.$

C: $\left\{ \boxed{g(x,y) = a} \right.$

$$\boxed{\begin{array}{l} f'_x - \lambda \cdot g'_x = 0 \\ f'_y - \lambda \cdot g'_y = 0 \\ g(x,y) = a \end{array}}$$

Lagrangebetingelsene (FOC+C):

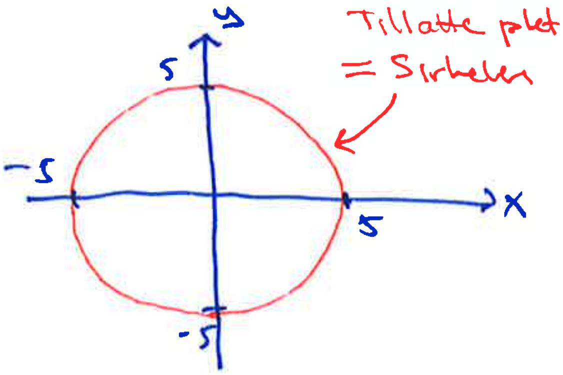
3 likninger : 3 ukjente x, y, λ

iii) Vi løser Lagrangebetingelsene FOC+C:

Løsningene $(x,y;\lambda)$ er kandidater for maks/min.

Eks: max/min $\underbrace{f(x,y) = 4x - 3y}_{\text{obj. fn.}}$ når $\underbrace{x^2 + y^2 = 25}_{\text{bibetingelsen}}$

Lagrange:



$$L = 4x - 3y - \lambda \cdot (x^2 + y^2)$$

$$\text{FOC}\begin{cases} L'_x = 4 - \lambda \cdot 2x = 0 \\ L'_y = -3 - \lambda \cdot 2y = 0 \end{cases}$$

$$C \{ \quad x^2 + y^2 = 25$$

$$4 = 2\lambda x \Rightarrow x = \frac{4}{2\lambda}$$

$$-3 = 2\lambda y \Rightarrow y = \frac{-3}{2\lambda}$$

$$\left(\frac{4}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2\lambda}\right)^2 = 25$$

$$\frac{16}{(2\lambda)^2} + \frac{9}{(2\lambda)^2} = 25$$

$$\frac{25}{(2\lambda)^2} = 25 \quad \Big| \cdot (2\lambda)^2$$

$$\frac{\frac{25 \cdot \cancel{(2\lambda)^2}}{\cancel{(2\lambda)^2}}}{25} = \frac{\cancel{25}(2\lambda)^2}{\cancel{25}}$$

$$1 = (2\lambda)^2$$

$$2\lambda = \pm 1$$

$$\lambda = \pm 1/2$$

$\lambda = 1/2$: $x = 4$, $y = -3$

$(x,y;\lambda) = (4,-3;1/2)$

$\lambda = -1/2$: $x = -4$, $y = 3$

$(x,y;\lambda) = (-4,3;-1/2)$

Konklusjon:

Løsning av FOC+C: $(4,-3;\ 1/2)$, $(-4,3;-1/2)$ ← Kandidater for max/min. (ordinære)

$f(x,y) = 4x - 3y$ $\quad f = 25 \quad\quad f = -25$

max? Ja. $\quad$ min? Ja.

Ekstremverdisetn: sirkelen er kompakt. ⇒ det fins maks/min

Resultat:

Hvis (x^*, y^*) er maks. eller min. i et Lagrangeproblem, så er en av følgende betingelser oppfylt:

i) Det fins λ slik at $(x^*; y^*; \lambda)$ oppfyller FOC + C

~~ii) Det er et tillatt punkt med degenerert bibetingelse, dvs $\nabla g(x^*, y^*)$~~

ii) Det er et tillatt punkt med degenerert bibetingelse, dvs $\nabla g(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} g'_x(x^*, y^*) \\ g'_y(x^*, y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\Updownarrow$

Punkt som oppfyller: $\left\{ \begin{array}{l} g(x,y) = a \\ g'_x = 0 \\ g'_y = 0 \end{array} \right.$

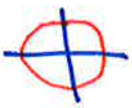
(x,y) maks/min $\Longrightarrow$ (x, y, λ) oppfyller FOC + C for en λ

$\uparrow$

ingen tillatte pkt med degenerert bibetingelse

Problem A: Det er ikke sikkert at det fins maks/min, for eksempel kan $f \to \pm\infty$ innenfor mengden av tillatte pkt.

Ekstremverdisetn: D begrenset $\Longrightarrow$ det fins maks/min



sirkelen er begrenset
det fins maks/min.

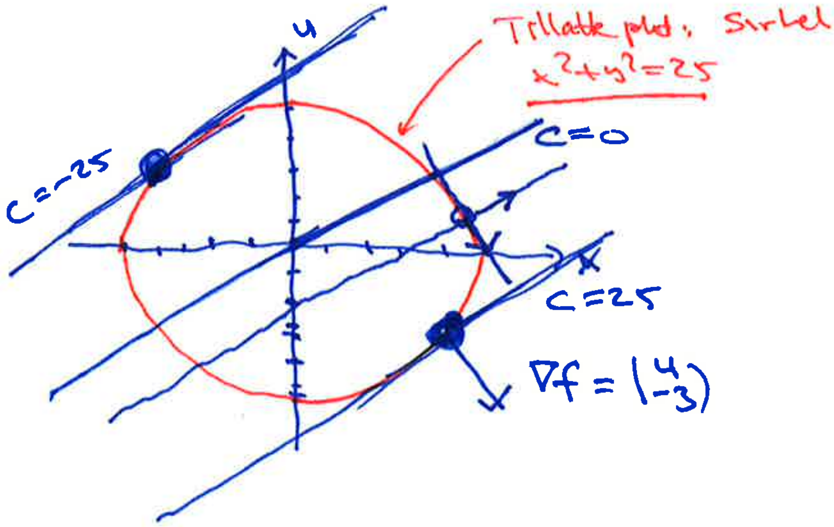
Problem B: Det kan finnes andre kandidatpkt enn løsninger av FOC+C. Det er tillatte pkt med degenerert bibetingelse (unntakspkt).

Eks: $\underbrace{x^2+y^2}_{g(x,y)}=25$

$g(x,y)=25$: $x^2+y^2=25$
$g'_x=0$: $2x=0$
$g'_y=0$: $2y=0$

Ingen tillatte pkt med degenerert bibetingelse. ← $x=0,\ y=0$; $0^2+0^2\neq 25$.

Konklusjon: max/min $f(x,y)=4x-3y$ når $x^2+y^2=25$ har:
maks: $f_{max}=25$ i $(x,y)=(4,-3)$ med $\lambda=1/2$
min: $f_{min}=-25$ i $(x,y)=(-4,3)$ med $\lambda=-1/2$



Nivåkurveforh:
$f(x,y)=c$
$4x-3y=c$
$c=0$: $4x-3y=0$
$y=4x/3$
$c\neq0$: $4x-3y=c$
$\frac{3y}{3}=\frac{4x-c}{3}$
$y=\frac{4}{3}x-\frac{c}{3}$

Hvis (x^*,y^*) er maks/min i et Lagrange problem, så er tangenten til $g(x,y)=a$ i (x^*,y^*) være lik tangenten til nivåkurven $f(x,y)=c$ som går gjennom (x^*,y^*): $\boxed{\nabla f=\lambda\cdot\nabla g}$

Forklaring: tangenten til $f(x,y)=c$ og tangent til $g(x,y)=a$ er like

$$\Updownarrow$$

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} g'_x \\ g'_y \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$f'_x = \lambda g'_x$$
$$f'_y = \lambda g'_y$$

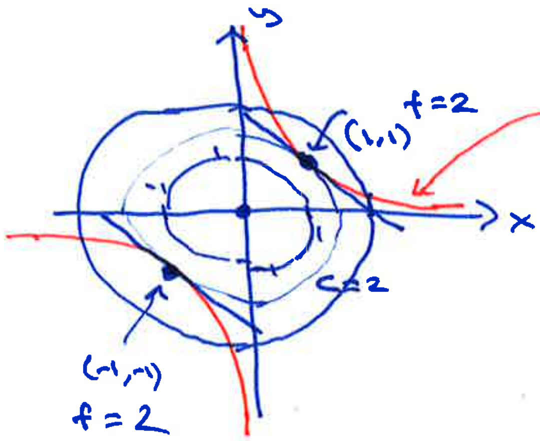
$$\Updownarrow$$

FOC: $\boxed{\begin{matrix} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} f'_x - \lambda \cdot g'_x = 0 \\ f'_y - \lambda g'_y = 0 \end{matrix}}$

Eks: max/min $f(x,y) = x^2+y^2$ når $xy=1$

Tillatte pkt:

$xy=1 \Rightarrow y = 1/x$



Tillatte pkt: $xy=1$ hyperbel

ikke begrenset

Kan være maks/min, men det er ikke sikkert

Alternativ 1: Geometrisk

$xy=1$ ← tillatte pkt (hyperbel)

$x^2+y^2=c$ ← nivåkurver for f (sirkel $c>0$)

$c=0$: $(0,0)$
$c=1$: $x^2+y^2=1$ sirkel $r=1$
$c=2$: $x^2+y^2=2$ " $r=\sqrt{2}$

Problemet har min, men ikke maks.

Unntakspkt: $g = xy = 1$
$g'_x = y = 0$
$g'_y = x = 0$
$0 \cdot 0 \neq 1$
ingen slike pkt (degenerert bib.)

Alternativ 2: Lagrange betingelser

$\mathcal{L} = x^2+y^2 - \lambda \cdot xy$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= 2x - \lambda y = 0 \\ \mathcal{L}'_y &= 2y - \lambda \cdot x = 0 \\ xy &= 1 \end{aligned}}$$

$2x = \lambda y \Rightarrow x = \dfrac{\lambda y}{2}$

$2y = \lambda x = \lambda \cdot \dfrac{\lambda y}{2} \quad | \cdot 2$

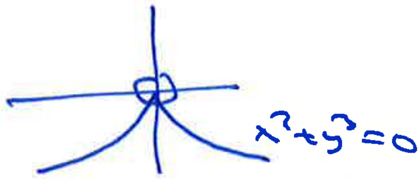
$4y = \lambda^2 y$

$4y - \lambda^2 y = 0$

$y(4-\lambda^2) = 0 \quad \cancel{y}\,(2-\lambda)(2+\lambda) = 0$

$y=0$	$\lambda=2$	$\lambda=-2$
~~$y=0$, $x=0$, $0 \cdot 0 \neq 1$~~ ingen løsn.	$x=y$, $y^2=1$, $y=\pm 1$, $(1,1;2)$ $f=2$, $(-1,-1;2)$ $f=2$	~~$x=-y$, $y\cdot(-y)=1$, $-y^2=1$, $y^2=-1$~~ ingen løsn

Eks: max y når $x^2+y^3=0$



$g(x,y) = x^2+y^3 = 0$.

$g(x,y)=a$:	$x^2+y^3=0$	$0^2+0^3=0$ ok	Ett pkt $(0,0)$ som er tillatt med des. bibetingelse.
$g'_x=0$	$2x=0$	$x=0$	
$g'_y=0$	$3y^2=0$	$y=0$	

$L = y - \lambda\cdot(x^2+y^3)$

$$\boxed{\begin{aligned} L'_x &= -\lambda\cdot 2x = 0 \\ L'_y &= 1-\lambda\cdot 3y^2=0 \\ x^2&+y^3=0 \end{aligned}}$$

FOC + C

ingen løsn.

– ingen "vanlige" kandidatpkt

– et unntakspkt:

$(x,y) = (0,0)$

Dette er maks:

$f_{max} = 0$: $(0,0)$