Plan:

1. Optimering uten bibetingelser
2. Ekstremverdisetningen
3. Optimering med bibetingelser (når bibetingelsene er enkle)

Pensum: [E] 7.6

Husk: Eksamenssett I
Løsning legges ut fredag.

1 Optimering uten bibetingelser

max / min $f(x,y)$

Metode:

1. Finn alle kandidatpunkter:
   - i) Stasjonære pkt: $\underbrace{f'_x = f'_y = 0}_{\text{førsteordens betingelsene}}$ } "vanlige" kandidatpunkt
   - ii) Andre kritiske pkt: f'_x eller f'_y er ikke defn.
   - iii) Randpunkt: et punkt i Df som har punkt utenfor Df "uendelig nær" = "på randen"

   } unntak

Eks: $f(x,y) = 2x + 3y - 1$ $\left.\begin{array}{l} f'_x = 2 \neq 0 \\ f'_y = 3 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ ingen maks/min

ingen kandidatpunkt

② **Klassifisere kandidatpunkt:**

Stasjonære pkt: (x^*, y^*) → Annenderivert-testen:

$$\begin{cases} |H(f)(x^*,y^*)| > 0,\ A > 0 : \text{lok min } (x^*,y^*) \\ \quad \uparrow \\ \quad \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \\ |H(f)(x^*,y^*)| > 0,\ A < 0 : \text{lok.maks. } (x^*,y^*) \\ |H(f)(x^*,y^*)| < 0 : \text{sadelpunkt } (x^*,y^*) \end{cases}$$

* Lokal klassifikasjon; lok. maks ⇒ kan være globalt maks = maks

lok. min ⇒ kan være globalt min

sadelpunkt ⇒ hverken maks eller min

* Kan ikke bruke annenderivert-testen hvis:

i) stasjonært pkt med $|H(f)(x^*,y^*)| = 0$

ii) randpunkt (andre kritiske pkt og randpkt)

Må bruke andre metoder: Definisjon maks/min

③ **Undersøke om lokale maks/min er globale**

– regne ut f i hvert av disse punktene ⇒ finn "beste" kandidat

– undersøk om f kan gå mot $\pm\infty$ eller om vi får større/mindre verdier enn "beste kandidat"

– vi kan gjøre kutt $(x=0,\ y=1, \ldots)$ eller sette inn punkt

Oppsummering 28

5b) $f(x,y) = x^2y + xy^3 + xy^2$

max/min $f(x,y)$

① Kandidatpkt:

Stasjonære: $f'_x = 2xy + y^3 + y^2 = 0$, $f'_y = x^2 + 3xy^2 + 2xy = 0$ } førsteordens-betingelser

$y=0$ eller $2x+y^2+y=0$ og $x=0$ eller $x+3y^2+2y=0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y\cdot(2x+y^2+y)=0 \\ x\cdot(x+3y^2+2y)=0 \end{cases}$

$\Updownarrow$

i) $y=0,\ x=0 \Rightarrow (0,0)$

ii) $y=0,\ x+3y^2+2y=0$ $(0,0)$

iii) $2x+y^2+y=0,\ x=0$ $x=0,\ y^2+y=0$, $y(y+1)=0$, $y=0,\ y=-1$ } $(0,0)$, $(0,-1)$

iv) $2x+y^2+y=0,\ x+3y^2+2y=0$

$\Downarrow$

$x = -3y^2-2y$

$2(-3y^2-2y)+y^2+y=0$

$-6y^2-4y+y^2+y=0$

$\rightarrow$ $-5y^2-3y=0$, $-y(5y+3)=0$, $y=0,\ x=0$, $y=-3/5$

$x = -\frac{27}{25} + \frac{6\cdot 5}{5\cdot 5} = 3/25$

$(0,0)$, $(3/25, -3/5)$

Stasjonære pkt = kandidatpkt: $(0,0), (0,-1), (3/25, -3/5)$

② $H(f) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+3y^2+2y \\ 2x+3y^2+2y & 6xy+2x \end{pmatrix}$

$6xy+2x = 2x(3y+1) = \frac{6}{25}(-4/5)$

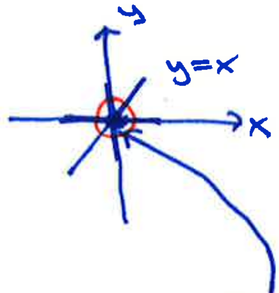
$2x+3y^2+2y = 6/25 + 27/25 - 6/5 = 3/25$

$(0,0)$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ det=0 ingen konklusjon

$(0,-1)$: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ det $= 0-1=-1<0$ sadelpkt

$(3/25, -3/5)$: $\begin{pmatrix} -6/5 & 3/25 \\ 3/25 & -24/125 \end{pmatrix}$ det $= \frac{6\cdot 24}{5^4} - \frac{9}{5^4} = \frac{135}{625} > 0$, $A<0$ lokalt maks

Undersøker (0,0) vha defn:

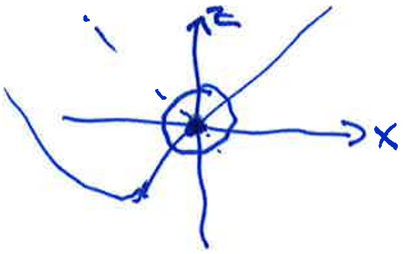


$f(x,y) = x^2y + xy^3 + xy^2 \quad f(0,0) = 0$

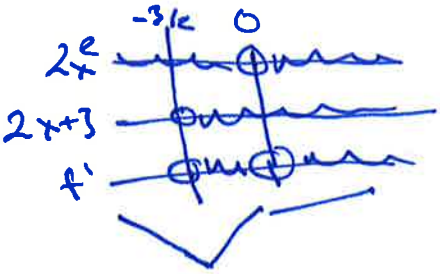
$f(0,0)=0$

$x=0: f=0 \qquad y=0: f=0$

$y=x: \quad f = x^3 + x^4 + x^3 = x^4 + 2x^3$



$f' = 4x^3 + 6x^2$
$= 2x^2(2x+3)$



$x>0: f>0$
$x<0: f<0$

Sadelpkt: (0,0)

Globalt maks/min:

* ingen globale min
* ingen globale maks

$\left(x^4 + 2x^3 \to \infty \text{ når } x \to \infty \right)$

Konklusjon. (0,0), (0,−1) : sadelpkt
$(3/25, -3/5)$: lokalt maks

5c) $f(x,y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$
$= \sqrt{u} = u^{1/2}, \quad u = 36 - 9x^2 - 4y^2$

$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (-18x) \qquad f'_y = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (-8y)$

$f'_x = \frac{-18x}{2\sqrt{u}} = 0 \qquad f'_y = \frac{-8y}{2\sqrt{u}} = 0 \qquad u(0,0) = 36 \neq 0$

$x = 0 \qquad y = 0 \qquad \Downarrow$

(0,0)

Klassifisering:

$f(0,0) = \sqrt{36} = 6$ globalt maks siden $f(x,y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2} \leq \sqrt{36} = 6$ for alle x, y

(2) Optimering med bibetingelser og ekstremverdisetningen

Optimering med bibetingelse:

$$\max/\min \underbrace{f(x,y)}_{\substack{\text{objektiv-}\\\text{funksjon}}} \text{ når } \underbrace{\begin{cases} g(x,y)=a \\ g(x,y)\leq a \\ g(x,y)<a \\ \vdots \end{cases}}_{\text{bibetingelser}}$$

objektivfunksjon = den funksjonen vi skal maksimere/minimere

Eks: max/min $f(x,y)=x^2+y^2$ når $2x+3y=6$

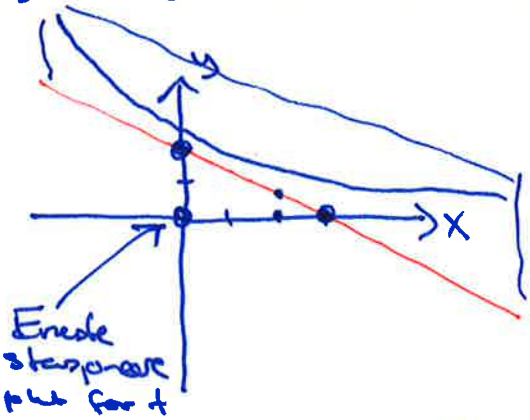
Bibetingelse:

$2x+3y=6$

(lineær likning ⇒ rett linje)

$$\frac{3y}{3}=\frac{6-2x}{3}$$

$$y=2-\frac{2}{3}x$$



rød linje = alle punkt som tilfredsstiller bibetingelsen = tillatte pkt

Defn: Et punkt er tillatt hvis det oppfyller alle bibetingelser. D kalles området av tillatte punkt.

Metode I: $2x+3y=6 \Leftrightarrow y=2-\frac{2}{3}x$

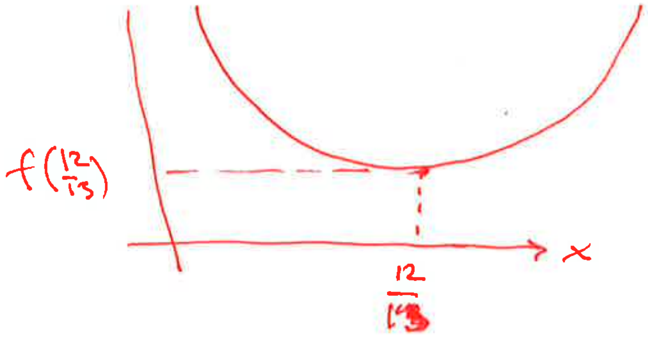
$$f(x,y)=x^2+y^2=x^2+\left(2-\frac{2}{3}x\right)^2$$
$$=x^2+4-\frac{8}{3}x+\frac{4}{9}x^2$$
$$=\frac{13}{9}x^2-\frac{8}{3}x+4$$

$$f = \frac{13}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4$$

$$f' = \frac{13}{9}\cdot 2x - \frac{8}{3} = 0$$

$$\frac{26}{9}x = \frac{8}{3}$$

$$x = \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{26}_{13}} = \underline{\frac{12}{13}}$$



Minimumspkt:

$$\underline{x = \frac{12}{13}} \qquad y = 2 - \frac{2}{3}x = \frac{26}{13} - \frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{12}^{4}}{13} = \underline{\frac{18}{13}}$$

$$\underline{(x,y) = \left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right)}$$

Minimumsverdi:

$$f\left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right) = \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{18}{13}\right)^2 = \frac{1}{13^2}(12^2+18^2) = \underline{\underline{\frac{468}{169}}} = \underline{\underline{\frac{36}{13}}}$$

<u>Ingen maksimumsverdi</u>

Oppsummering: Når vi løser bibetingelsen for en av variablene og setter inn i objektivfunksjonen, gjør vi om problemet til max/min av en funksjon i *én variabel* *uten bibetingelser*.

Nyttig å bruke når bibetingelsen er en *enkel likning*.

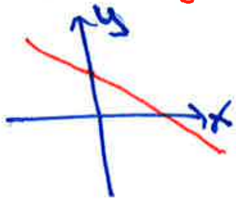
> **Ekstremverdisetningen**
>
> Hvis f er en kontinuerlig funksjon på en *kompakt* delmengde D av xy-planet, så har f et maks. og et min.

Bruk: f = objektivfunksjon

D = mengden av tillatte punkt (punkt som oppfyller alle bibetingelser)

$f = x^2 + y^2$ ✓

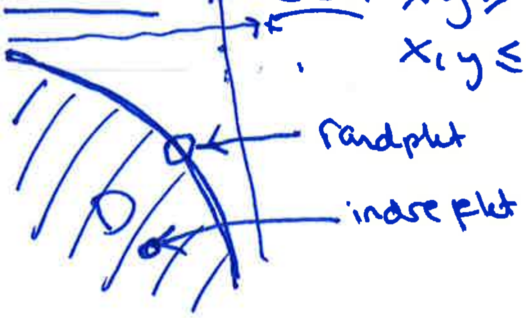
D = rød linje



Defn: D er *kompakt* hvis den er *lukket* og *begrenset*

Lukket: Eks: $xy \geq 1$

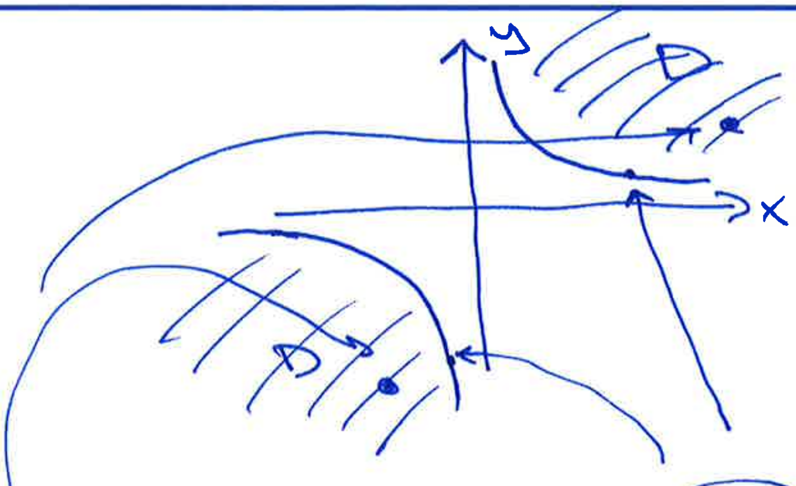
$x, y \leq 0$



Defn: Et *randpunkt* for D er et punkt som har både pkt i D og punkt utenfor D "uendelig nær".

Defn: Et punkt i D som *ikke* er randpkt kalles *indre pkt*

Eks: $\boxed{xy \geq 1} \leftarrow D$



$xy = 1$: $y = 1/x$

$xy > 1$: $\xrightarrow{x>0}$ $y > 1/x$

$x<0$ $\downarrow$

$y < 1/x$

Randpkt: Alle pkt med $xy = 1$

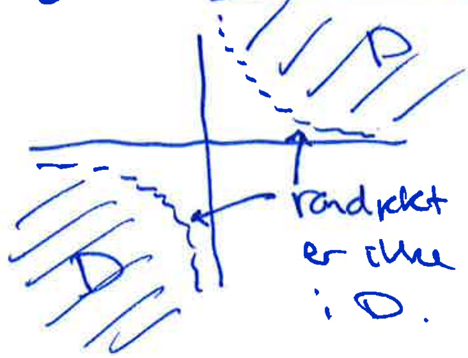
= hyperbelen

Indre pkt: Alle andre pkt

Defn: D er lukket hvis alle randpkt for D er med i D.

Eks: $xy \geq 1$: lukket

$xy > 1$: ikke lukket



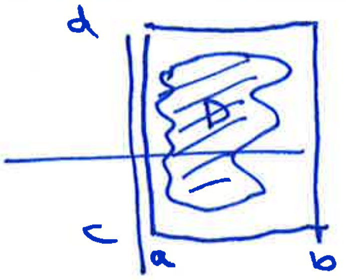
randpkt for D er ikke med i D.

> En mengde som er gitt ved likninger (=) eller lukkede ulikheter ($\leq$, $\geq$) er alltid lukket

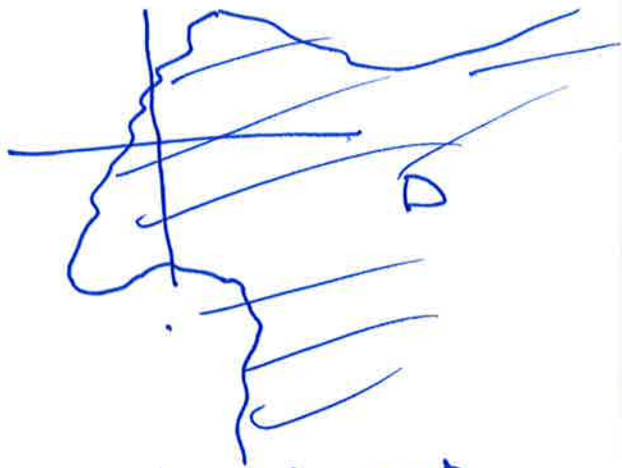
Eks: $4x^2 + 9y^2 = 1$ lukket

$4x^3 + y^2 - x + 3 \leq 7$ lukket

Begrenset:



begrenset



ikke begrenset

Defn: En mengde D er begrenset hvis det finnes et rektangel (med endelige sider) som inneholder alle punkt i D.

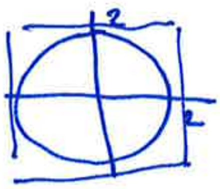
Dvs: Det fins tall a, b, c, d (som er endelige) slik at

$$\left.\begin{array}{l} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{array}\right\}$$

for alle (x,y) i D.

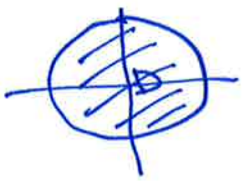
Metode: — skissere mengden D
for å avgjøre om D er begrenset — bruke ulikhetene

Eks: $D: x^2+y^2=4$



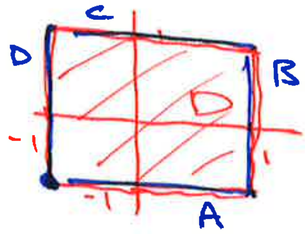
begrenset

$D: x^2+y^2 \le 4$



begrenset.

Eks: max/min $\underbrace{f(x,y)=e^{xy}}_{\text{kontinuerlig objektiv fn.}}$ ✓ når $-1 \le x,y \le 1$



lukket: ✓ pga $\le$ ✓

begrenset: ✓

Ekstremverdisetn: det fins maks/min.

Metode: Finn alle kandidat pkt

① **Stasjonære pkt:**

$$f'_x = e^{xy}\cdot y = 0 \qquad y=0$$
$$f'_y = e^{xy}\cdot x = 0 \qquad x=0$$

$\Downarrow$

$(0,0)$ ✓ tillatt

$f(0,0)=1$

② **Randpkt:**

A: $y=-1$, $-1 \le x \le 1$

$$f = e^{x\cdot(-1)} = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

avtagende

$$f' = e^{-x}\cdot(-1)$$

Størst verdi: $f(-1,-1) = e \approx 2.7$

Minst verdi: $f(1,-1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.37$

B: $x=1$, $-1 \le y \le 1$ $\qquad f = e^x$ voksende $\qquad$ Størst: $f(1,1)=e$; Minst: $f(-1,1)=e^{-1}$

C: $y=1$, $-1 \le x \le 1$ $\qquad f = e^x$ voksende $\qquad$ Størst: $f(1,1)=e$; Minst: $f(-1,1)=e^{-1}$

D: $x=-1$, $-1 \le y \le 1$ $\qquad f = e^{-y}$ avtagende $\qquad$ Størst: $f(-1,-1)=e$; Minst: $f(-1,1)=e^{-1}$

Konklusjon:

$f_{max} = e$; $(-1,-1)$ og $(1,1)$

$f_{min} = e^{-1} = 1/e$; $(-1,1)$ og $(1,-1)$