Plan:

① Stasjonære punkter

② Andrederivert-testen

③ Maks/min-problemer uten bibetingelser

Pensum:

[E] 7.4–7.5

Husk: i) Veiledning fredag kl 11.

ii) Eksamenssett I (se under Forelesning 31)

Repetisjon:

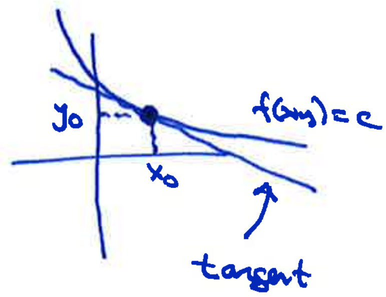
a) **Hessematrisen:**

Hesse-matrisen til f er

$$\boxed{H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}}$$

Det er en 2×2 symmetrisk matrise, dvs at $f''_{xy} = f''_{yx}$ for alle "vanlige" funksjoner f.

b) **Tangenter til nivåkurver:**



Nivåkurven $f(x,y)=c$ har tangent i et pkt (x_0,y_0) på nivåkurven gitt ved

$$y - y_0 = a\cdot(x - x_0)$$

hvor stigningstallet til tangenten er

$$\boxed{a = -\frac{f'_x}{f'_y}}$$

c) **Gradienten:** (nabla: ∇)

Gradienten til f er vektoren $\nabla f = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix}$.

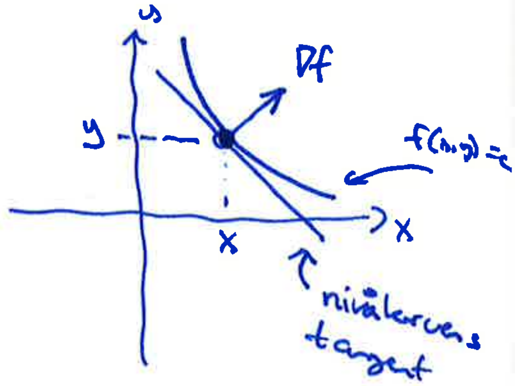
Vi tenker på denne vektoren som en pil med startpkt. (x,y).

Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/
Handelshøyskolen BI
Økonomi og Ledelse

Gradienten har følgende egenskaper:

i) ∇f peker i den retningen hvor f vokser raskest (hvor grafen går "brattest oppover")

ii) ∇f står normalt på nivåkurvens tangent



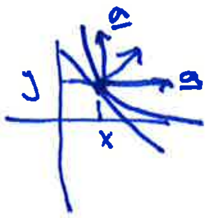
d) Den retningsderiverte:

$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$: en vektor som angir en retning (slik som gradienten)

$\Downarrow$

Den retningsderiverte til f i retningen $\underline{a}$:

$$f'_{\underline{a}} = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 f'_x + a_2 f'_y$$



Spesialtilfeller:
$$\begin{cases} \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : & f'_{\underline{a}} = f'_x \\ \underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : & f'_{\underline{a}} = f'_y \end{cases}$$

e) Lineære approksimasjoner: Første ordens Taylorpolynom for funksjoner i to variable

$$\underbrace{f(x,y) \simeq f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}_{L(x,y)}$$

lineær approksimasjon i punktet (x_0,y_0)

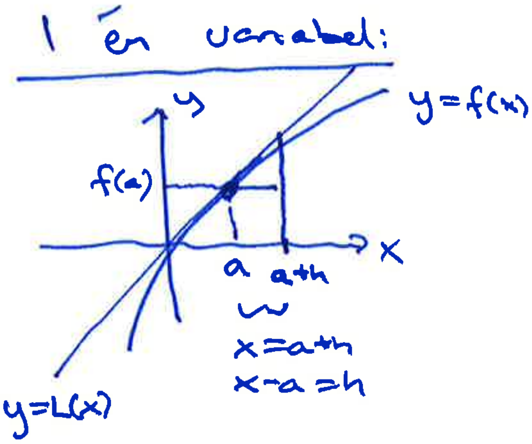
$L(x,y)$, lineær funksjon som tilnærmer $f(x,y)$ best mulig når (x,y) er nært (x_0,y_0)

Husk: Taylorpolynom i én variabel

Grad 1: Lineær approksimasjon

$f(x) \simeq f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$

I én variabel:



$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$$

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

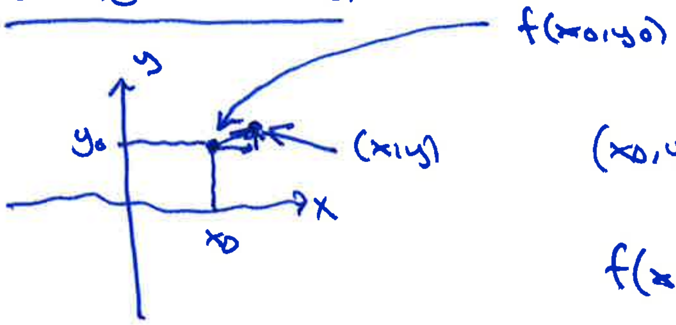
$$y = \underbrace{f(a) + f'(a) \cdot (x-a)}_{L(x)}$$

$\boxed{L(x) \text{ er den lineære approksimasjonen til } f(x) \text{ i } x=a}$

$$f(x) \simeq L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

når x er nær a.

I to variable:



$(x_0,y_0) \to (x,y)$: $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$

$$f(x,y) \simeq \underbrace{f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0) \cdot (x-x_0) + f'_y(x_0,y_0) \cdot (y-y_0)}_{L(x,y)}$$

Defn:

Den lineære approksimasjonen til $f(x,y)$ i (x_0,y_0) er

$$\boxed{L(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0) \cdot (x-x_0) + f'_y(x_0,y_0) \cdot (y-y_0)}$$

Eks: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ i $(1,1)$

$$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_x = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_y = \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$f(1,1) = \sqrt{2}$

$f'_x(1,1) = 1/\sqrt{2}$

$f'_y(1,1) = 1/\sqrt{2}$

$$\boxed{L(x,y) = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(y-1)}$$

Max / min - problemer :

$\boxed{\text{maks/min } f(x,y)}$

optimering uten bibetingelser

① Stasjonærpunkter:

Defn: Et punkt (x^*,y^*) kalles et stasjonært pkt. for f hvis $f'_x(x^*,y^*) = f'_y(x^*,y^*) = 0$.

Eks: $f(x,y) = x^2+y^2$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x = 0 \\ f'_y &= 2y = 0 \end{aligned}\right\}\ \text{førsteordens-betingelser}$$

$\Downarrow$

$x=0$
$y=0$

Stasjonære pkt: $(x,y) = \underline{\underline{(0,0)}}$ $\quad (x^*,y^*)$

Eks: $f(x,y) = x^2-4xy+5y^2$

$f'_x = 2x-4y = 0$

$f'_y = -4x+10y = 0$

$\Rightarrow$ Stasjonære pkt: $(x,y)=\underline{\underline{(0,0)}}$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

Eks: $f(x,y) = 2x-3y+1$

$f'_x = 2 = 0$

$f'_y = 3 = 0$

$\Rightarrow$ ingen stasjonære pkt.

Resultat: Hvis (x^*, y^*) som er maks eller min for f, så har vi:

i) (x^*, y^*) er et stasjonært pkt.

ii) (x^*, y^*) er et punkt der f'_x eller f'_y ikke eksisterer

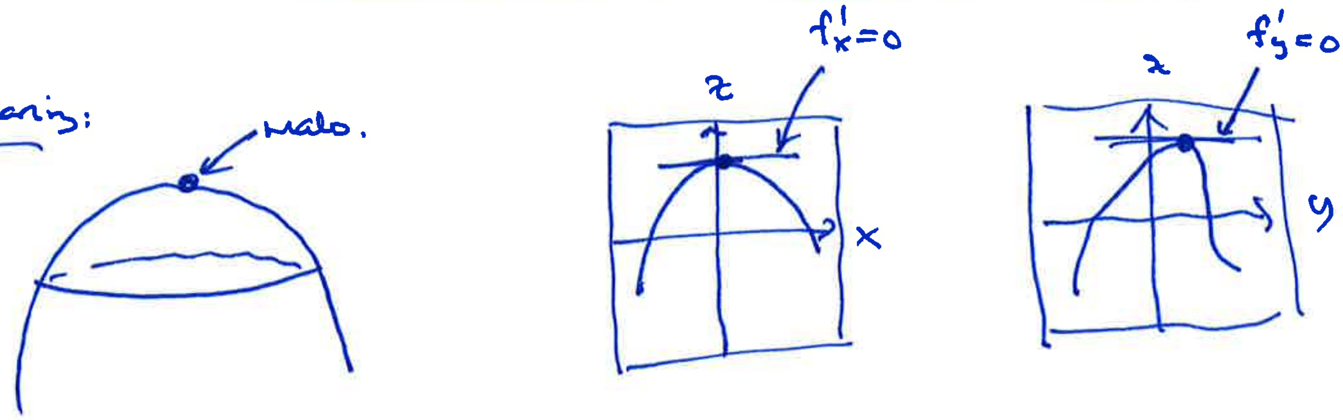
iii) (x^*, y^*) er et randpkt.

Merk: Hvis $f(x,y)$ er et polynom, så fines f'_x, f'_y overalt, og $D_f = \mathbb{R}^2$ slik at det ikke er noen randpkt.

Gjelder for fn. uten ii), iii) →

$$\boxed{\text{maks/min for } f \implies \text{stasjonært pkt}}$$

Forklaring:



(2) Annenderivert-testen

Annenderivert-testen:

Anta at (x^*,y^*) er et stasjonært punkt for f. Da har vi:

$$H(f)(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x^*,y^*) & f''_{xy}(x^*,y^*) \\ f''_{yx}(x^*,y^*) & f''_{yy}(x^*,y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

i) $\det H(f)(x^*,y^*) = AC - B^2 > 0$ og $A > 0$ $\Rightarrow$ (x^*,y^*) er lokalt min.

ii) $\det H(f)(x^*,y^*) = AC - B^2 > 0$ og $A < 0$ " er lokalt maks.

iii) $\det H(f)(x^*,y^*) = AC - B^2 < 0$ $\Rightarrow$ (x^*,y^*) er sadelpkt

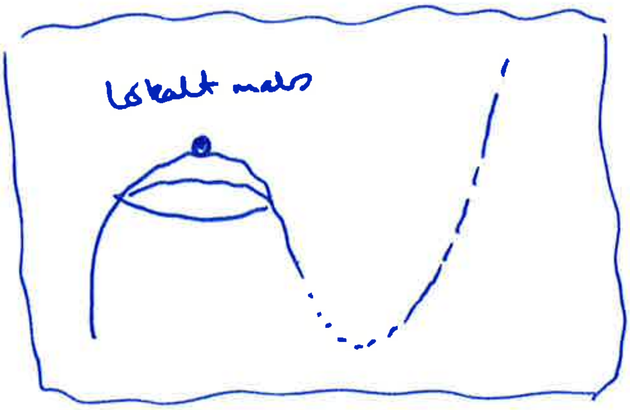
Hvis $\det H(f)(x^*,y^*) = AC - B^2 = 0$, har testen ingen konklusjon.

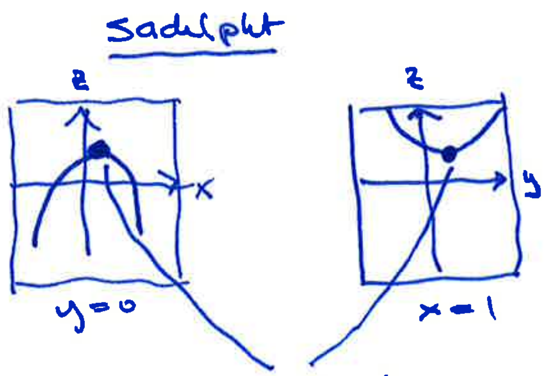
Defn:

(x^*,y^*) er lokalt maks hvis $f(x^*,y^*) \geq f(x,y)$ for alle pkt (x,y) nær (x^*,y^*)

" lokalt min $f(x^*,y^*) \leq f(x,y)$ — " —

" er sadelpkt hvis det er et stasjonært pkt som hverken er lokalt maks eller min.





Eks: $f(x,y) = x^2 - 4xy + 5y^2$

$f'_x = 2x - 4y = 0$

$f'_y = -4x + 10y = 0$ $\Longrightarrow$ Stasj. pkt: $\underline{\underline{(0,0)}}$

$$H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \det H(f)(0,0) = 20 - 16 = 4 > 0 \\ A = 2 > 0 \end{array}\right\} \quad (0,0) \text{ er lokalt min}$$

Forklaring:

$AC - B^2 > 0$

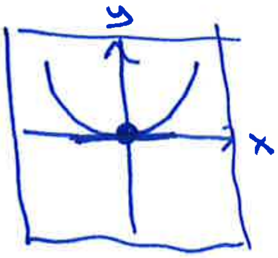
$AC > B^2 \geq 0$

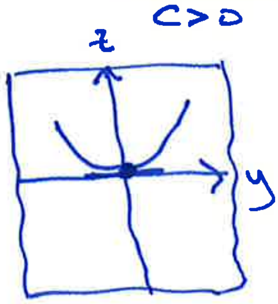
$AC > 0$

$\nearrow$ $A > 0,\ C > 0$: lokalt min

$\searrow$ $A < 0,\ C < 0$: lokalt maks.

$A > 0$: $C > 0$





$f'_x = 0$

$f''_{xx} = A > 0$

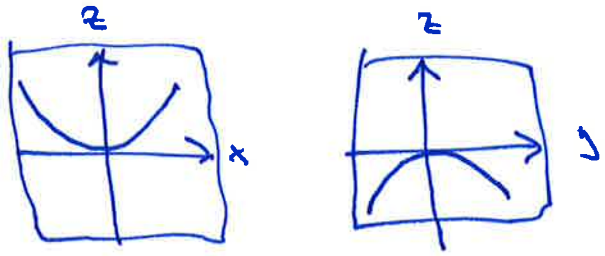
$f'_y = 0$

$f''_{yy} = C$

$AC - B^2 < 0$: $AC < B^2$

Typisk eksempel:

$A > 0$, $C < 0$



sadelpkt.

Eks: $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$

$f'_x = 2x - 3y = 0$

$f'_y = -3x + 2y = 0$

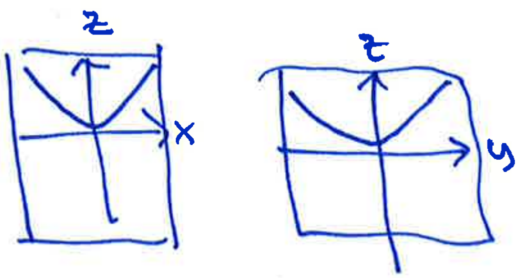
$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

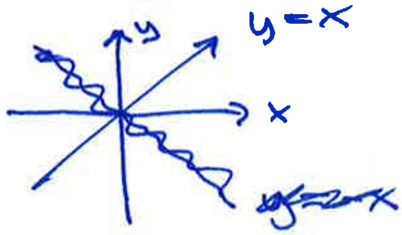
(0,0) stasjonære pkt.

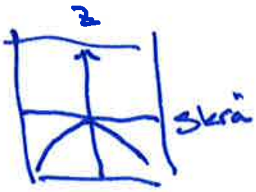
$$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det H(f)(0,0) = -5 < 0$

(0,0) sadelpkt







$$f(x,y) = f(x,+x) = x^2 - 3x\cdot(+x) + (+x)^2 = x^2 - 3x^2 + x^2 = -x^2$$

Kondidat-punkt

Løse max/min $f(x,y)$

Metode:
1. Finne alle stasjonære pkt
2. Klassifisere stasjonære pkt.
3. Undersøk om evt. lokale maks/min er globale maks/min

annenderivert-testen

Eks: $f(x,y) = x^3 + 9xy + y^3$

$f'_x = 3x^2 + 9y = 0$ (1) $\frac{9y}{9} = \frac{-3x^2}{9} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x^2$

$f'_y = 9x + 3y^2 = 0$ (2) $9x + 3(-\frac{1}{3}x^2)^2 = 0$

$9x + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot x^4 = 0 \quad | \cdot 3$

$27x + x^4 = 0$

$x(27 + x^3) = 0$

$x = 0$, $y = 0$ eller $27 + x^3 = 0$

$x^3 = -27$

$x = \sqrt[3]{-27}$

$x = -3$, $y = -3$

Alle kandidat-pkt

$\boxed{\text{Stasjonære pkt: } (0,0),\ (-3,-3)}$

$f(0,0) = 0 \quad f(-3,-3) = 27$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & 9 \\ 9 & 6y \end{pmatrix}$$

i) $(0,0)$: $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$

$\det = -81 < 0 \Rightarrow (0,0)$ sadelpkt $\Rightarrow$ ingen min

ii) $(-3,-3)$: $H(f)(-3,-3) = \begin{pmatrix} -18 & 9 \\ 9 & -18 \end{pmatrix}$

$\det = 18 \cdot 18 - 9 \cdot 9 > 0 \Rightarrow (-3,-3)$ lokalt maks

$A = -18 < 0$

$f(x,y) = x^3 + 9xy + y^3$

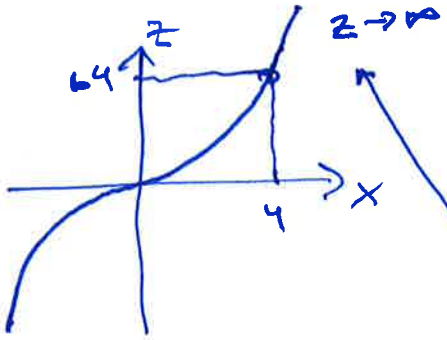
$f(-3,-3) = 27$ <u>lokalt maks</u>

Finnes (x,y) med $f(x,y) > 27$?

i) $f(4,0) = 4^3 = 64 > 27$

<u>Konklusjon:</u> f har ikke <u>globalt maks</u>

ii) <u>$y=0$:</u>



$y=0$

$z = f(x,y) = x^3 + 9\cdot x\cdot 0 + 0^3$

$z = x^3$

Kun kandidatpkt $(0,0)$, $(-3,-3)$ kan være maks-pkt for f, ingen av dem er <u>globale maks</u> $\Rightarrow$ det finnes ingen globale maks.

Forklaringen er at når <u>$y=0$ og $x\to\infty$, så går $f(x,y)\to\infty$</u>

Eks: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

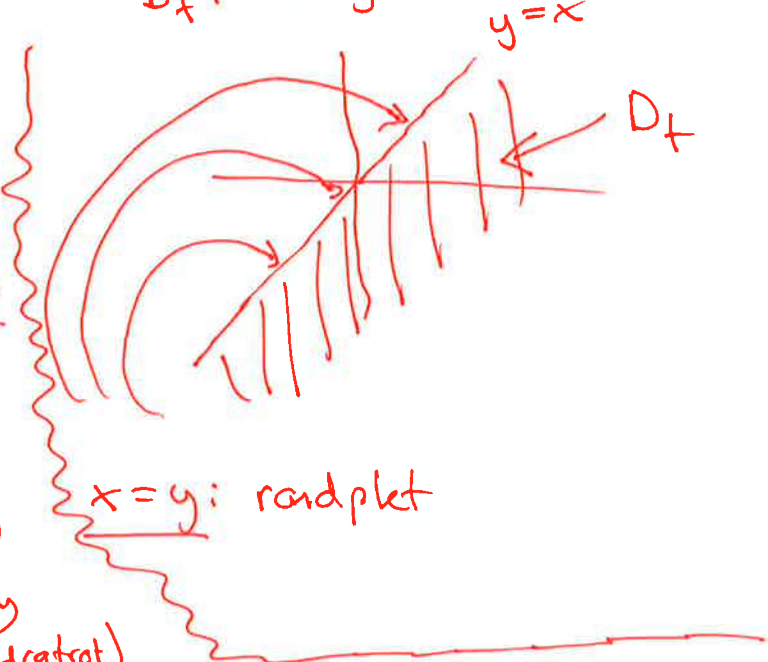
$f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ finnes ikke pga null i nevner

Her er $(x,y)=(0,0)$ et eksempel på globalt minimumspunkt hvor f'_x, f'_y ikke eksisterer:

$f(0,0) = \sqrt{0^2+0^2} = 0$
$f(x,y) \geq 0$ (pga kvadratrot) for alle x,y

Eks: $f(x,y) = \sqrt{x-y}$

D_f: $x - y \geq 0$



Her er alle pkt på linjen $y=x$ eksempler på globalt minimumspkt som er randpkt

$f(x,y) = \sqrt{0} = 0$ når $x=y$
$f(x,y) \geq 0$ for alle x,y (pga kvadratrot)