Plan:

1. Regning med matriser
2. Inverse matriser og lineære systemer

Pensum: [E] 6.5-6.6

Legger ut nå

MET 11804 / 11801 : Korte innlevering høst

MET 11806 : fasoppgave (innlevering) vår

Kommer i slutten av neste uke

Repetisjon:

1) Lineære system med parametre

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \underset{\text{matriseform}}{A\cdot\underline{x} = \underline{b}} \Leftrightarrow \underset{\text{utvidet matrise}}{(A|\underline{b})}$$

$$\underset{\text{koeff. matrise}}{A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Metode: (spesielt om det er parametre)

Hvis $m=n$: # likninger = # ukjente

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ én løsning { Kramers regel (invers matrise)

$|A| = 0 \Leftrightarrow$ { ingen løsning eller uendelig mange løsn. } { For hver a slik at $|A|=0$: løs ved hjelp av Gauss

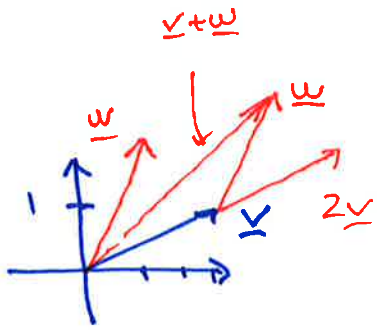
Kramers regel: Forutsetninger: i) $m = n$ ii) $|A| \neq 0$ (Én løsning)

$$\boxed{x_1 = \frac{|A_1(\underline{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\underline{b})|}{|A|} \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_n(\underline{b})|}{|A|}}$$

der $A_i(\underline{b})$ er matrisen vi får hvis vi bytter ut kolonne i fra A med $\underline{b}$.

ii) **Vektorregning**

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$



– addisjon, skalarmultiplikasjon

$\underline{v} + \underline{w}$ $\qquad r \cdot \underline{v}$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$2\underline{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v} + \underline{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

– **lineærkombinasjon** av $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_r$

$$c_1 \cdot \underline{v}_1 + c_2 \cdot \underline{v}_2 + \dots + c_r \cdot \underline{v}_r$$

der $c_1, c_2, \dots, c_r$ er tall

Oppgaveark 23, Opps. 9:

	60	75	320
	A	B	C
1	80	80	350
2	100	25	500
3	40	100	55

$* = 0$: én løsning

$* \neq 0$: ingen løsning

a) Vi kjøper x aksjer i selskap A
y — " — B.
z — " — C.

$$\boxed{60x + 75y + 320z = 400.000}$$

samlet kjøpesum er 400.000.

b) R_1, R_2, R_3 } avkastning (gevinst) i de tre sc.

	A	B	C
1	20	5	30
2	40	−50	180
3	−20	25	−265

← gevinst pr aksje pr scenario

$$\boxed{\begin{aligned} 20x + 5y + 30z &= R_1 \\ 40x - 50y + 180z &= R_2 \\ -20x + 25y - 265z &= R_3 \\ 60x + 75y + 320z &= C \end{aligned}}$$

← 50.000
← 25.000
← −100.000
$C = 400.000$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 5 & 30 & R_1 \\ 40 & -50 & 180 & R_2 \\ -20 & 25 & -265 & R_3 \\ 60 & 75 & 320 & C \end{array}\right) \begin{array}{l} -2, 1, -3 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 5 & 30 & R_1 \\ 0 & -60 & 120 & R_2 - 2R_1 \\ 0 & 30 & -235 & R_3 + R_1 \\ 0 & 60 & 230 & C - 3R_1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \tfrac{1}{2}, 1 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 5 & 30 & R_1 \\ 0 & -60 & 120 & R_2 - 2R_1 \\ 0 & 0 & -175 & R_3 + R_1 + 0.5(R_2 - 2R_1) \\ 0 & 0 & 350 & C - 3R_1 + R_2 - 2R_1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 5 & 30 & R_1 \\ 0 & -60 & 120 & R_2 - 2R_1 \\ 0 & 0 & -175 & R_3 + 0.5R_2 \\ 0 & 0 & 0 & (*) \end{array}\right)$$

$$* = C - 3R_1 + R_2 - 2R_1 + 2(R_3 + 0.5R_2)$$
$$= C - 5R_1 + 2R_2 + 2R_3$$

$* = 0$: $\boxed{C = 5R_1 - 2R_2 - 2R_3}$ Ēn løsning

$C \neq 5R_1 - 2R_2 - 2R_3$ Ingen løsning

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= 50.000 \\ R_2 &= 25.000 \\ R_3 &= -100.000 \\ C &= 400.000 \end{aligned}\right\}$$

$400.000 = 250.000 - 50.000 + 200.000$ Vok.

$\Downarrow$

Ēn løsning

$\Downarrow$

mulig å få til en slik portefølje, løs for x, y, z

$$x = 1187\tfrac{1}{2}$$
$$y = 2250$$
$$z = 500$$

$$20x + 5y + 30z = 50.000$$
$$-60y + 120z = -75.000$$
$$-175z = -87.500$$

Konklusjon: Det finnes en portefølje med $(R_1, R_2, R_3) = (50.000, 25000, -100.000)$, kan finne dette ved å velge

$x = 1187\tfrac{1}{2}$ aksje i A

$y = 2250$ — " — B

$z = 500$ — " — C

c) Portefølje med $R_1 > 0$, $R_2 = R_3 = 0$:

Bruker trappeformen fra b), må ha

$$* = 0 \iff C = 5R_1 - 2R_2 - 2R_3$$

$$400.000 = 5R_1$$

$$R_1 = 80.000$$

Kan finne en slik portefølje. Velg x, y, z slik at:

$$x = 3333 \tfrac{1}{3}$$

$$y = \frac{160.000}{60} = 2666 \tfrac{2}{3}$$

$$z = 0$$

$$20x + 5y + 30z = 80.000$$
$$-60y + 120z = -160.000$$
$$-175z = 0$$

Dvs $3333 \tfrac{1}{3}$ aksjer i A, $2666 \tfrac{2}{3}$ aksjer i B, 0 aksjer i C

d) Mulige fulltripler (R_1, R_2, R_3) er de som oppfyller

$$* = 0 \iff C = 5R_1 - 2R_2 - 2R_3$$

$$400000 = 5R_1 - 2R_2 - 2R_3$$

Vi kan finne portefølje med $R_1, R_2, R_3 > 0$, for eksempel $R_1 = R_2 = R_3 = 400.000$. Må da velge

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 25.190,48 \\ y &= -190,48 \\ z &= -3428,57 \end{aligned}}$$

$$20x + 5y + 30z = 400.000$$
$$-60y + 120z = -400.000$$
$$-175z = 600.000$$

① Matriseregning:

Operasjoner:

i) Addisjon / subtraksjon: $\underbrace{A+B, \quad A-B}$

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ — definert hvis A og B har samme størrelse

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ — regnes ut posisjon for posisjon

ii) Skalarmultiplikasjon: $r \cdot A = A \cdot r$

Eks: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

iii) Matrisemultiplikasjon: $A \cdot B$

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \left(0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \;\middle|\; 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$

$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}}}$

Merk: $A \cdot B$ er definert hvis # kolonner i A = # rader i B

$\boxed{\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times r}{B} \rightarrow \underset{m \times r}{AB}}$

Svaret har $\begin{cases} \text{rader} = \text{\# rader i } A \\ \text{kolonner} = \text{\# kolonner i } B \end{cases}$

Eks: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 7 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}23 & 2\\ 10 & 1\end{pmatrix}$

$2\times 3 \qquad 3\times 2$

$1\cdot\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

$0\cdot\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix} = B \\ \hline A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 7 & 1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}23 & 2\\ 10 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = B \\ \hline A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

Merk: 1) $AB \neq BA$

(for enkelte matriser kan $AB = BA$, men normalt er de ikke like)

Eks: $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

2) De fleste andre regneregler er som før:

Eks: $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$

Men: $(A+B)\cdot(A-B) = A\cdot A + B\cdot A - AB - B\cdot B$

$= A^2 - B^2 + \underline{BA - AB}$

Identitetsmatrisen:

$n=2$: $I = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$n=3$: $I = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Egenskap: $\boxed{\begin{array}{l} A\cdot I = A \\ I\cdot A = A\end{array}}$

"I for matriser = 1 for tall"

Eks: $\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\3&-1\end{pmatrix}$

Potenser: definert hvis A er kvadratisk

$A^2 = A\cdot A$

$A^3 = A\cdot A\cdot A$

Eks: $A = \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

A^2: $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=A \\ \hline A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}\end{array}$$

Transponering: A^T = A transponert

Eks: $A = \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ "bytter om rader og kolonner"

$A = \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ "Speiling om hoveddiagonal"

Defn: A er symmetrisk hvis $A^T = A$.

Eks: $\begin{pmatrix}1&2&4\\7&-1&0\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1&7\\2&-1\\4&0\end{pmatrix}$

② Inverse matriser

Eks: inversen til et tall

inversen til 3 er $\frac{1}{3}$

$$3x = 9$$
$$\frac{1}{3}\cdot(3x) = \frac{1}{3}\cdot 9$$
$$x = 3$$
$$\frac{1}{3}\cdot 3 = 1$$

Definisjon:

En invers til matrise A er en matrise B slik at

$$A \cdot B = I$$
og
$$B \cdot A = I$$

Hvis A har en invers matrise, skrives den A^{-1} istedet for B.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8}$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= I$$

Formel for A^{-1} i tilfellet $n=2$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$|A| \neq 0$: hvis $|A| = ad-bc \neq 0$

$|A|=0$: A^{-1} finnes ikke hvis $|A|=0$.

Resultat: Gjelder for alle n

La A være en $n\times n$-matrise. Da har vi:

i) $|A|=0 \implies A$ har ingen invers

ii) $|A| \neq 0 \implies A$ har en entydig invers matrise

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A)$$

der $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T$

den adjungerte matrisen

Nyttig å huske på: Hvis A er symmetrisk, er også kofaktormatrisen $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots \\ C_{21} & & \\ \vdots & & \cdots \end{pmatrix}$ symmetrisk, og vi trenger ikke transponere den.

Eks: Lineært system

$$\begin{aligned} 3x + y &= 7 \\ x + 3y &= 13 \end{aligned} \xrightarrow[\text{form}]{\text{matrise-}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{aligned} A \cdot \underline{x} &= \underline{b} \\ A^{-1} \cdot (A\underline{x}) &= A^{-1} \cdot \underline{b} \\ (A^{-1} \cdot A) \underline{x} &= A^{-1} \cdot \underline{b} \\ I \cdot \underline{x} &= A^{-1} \cdot \underline{b} \\ \underline{x} &= A^{-1} \cdot \underline{b} \end{aligned}$$

gitt at A^{-1} finnes $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$ $\Updownarrow$ én løsning

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 32 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}}}$$

Formel: $A\underline{x} = \underline{b}$ lineært system på matriseform

Hvis $\underline{m = n}$ og $\underline{|A| \neq 0}$, så er $\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$.

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1\cdot 6 + (-1)\cdot 5 + 1 \cdot 1 = 2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_{11} = 6$ $\quad C_{12} = -5$ $\quad C_{13} = 1$

$C_{21} = -6$ $\quad C_{22} = 8$ $\quad C_{23} = -2$

$C_{31} = 2$ $\quad C_{32} = -3$ $\quad C_{33} = 1$

Eq:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot \underline{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 18 - 42 + 26 \\ -15 + 56 - 39 \\ 3 - 14 + 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x = 1$
$y = 1$
$z = 1$