Plan:

1. Matriser og vektorer
2. Determinanter
3. Determinanter og lineære system

Pensum:
[E] 6.4

Fortsetter med dette neste gang.

Repetisjon:

i) Lineære likningssystem: $m \times n$ betyr $\begin{cases} m & \text{likninger} \\ n & \text{ukjente} \end{cases}$

$$m \left\{ \boxed{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}} \right.$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n}$$

der a_{ij}, b_i er gitte tall

ii) Gauss-eliminasjon: generell metode (kan brukes til å løse alle lineære system)

① Skriv ned utvidet matrise til systemet

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

utvidet matrise

② Gjør om til trappeform vha elementære radoperasjoner

③ Skriv om trappeformen til et lineært system, og løs ved hjelp av baklengs substitusjon

trappeform

Husk:
- merk pivot-posisjonene!
- kan alltid komme til en trappeform, den er ikke entydig, men pivot-posisjonene er entydig.

Opps. 5:

$$\begin{aligned} x+y+z+w &= 10 \\ x+2y+4z-w &= 7 \\ x-y+z+11w &= 16 \end{aligned}$$

$\underline{3\times 4}$ lineært system

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 11 & 16 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 10 & 6 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

x, y, z: avhengige variabler

w: fri variabel

ingen pivot

trappeform

$$\begin{aligned} x+y+z+w &= 10 \\ y+3z-2w &= -3 \\ 6z+6w &= 0 \end{aligned}$$

pivot-posisjonene bestemmer antall løsninger

Baklengs substitusjon:

(3) $6z+6w=0$

$$\frac{6z}{6} = \frac{-6w}{6}$$

$$\boxed{z=-w}$$

(2) $y+3z-2w=-3$

$y+3(-w)-2w=-3$

$$\boxed{y=5w-3}$$

(1) $x+y+z+w=10$

$x+5w-3+(-w)+w=10$

$$\boxed{x=-5w+13}$$

x, y, z: avhengige variabler (har pivotposisjoner)

w: fri variabel (mangler pivotposisjon)

Løsning:

$$(x,y,z,w) = \underline{(-5w+13,\ 5w-3,\ -w,\ w)}$$

med w fri

uendelig mange løsninger, én frihetsgrad = én fri variabel.

Konklusjon:

Ethvert lineært system kan løses vha Gauss-eliminasjon og antall løsninger er bestemt av pivot-posisjonene:

i) ingen løsninger $\iff$ pivot-posisjon i siste kolonne } inkonsistent

ii) én løsning $\iff$ pivot-posisjon i alle variabel-kolonner = ingen fri variabler

iii) uendelig mange løsninger $\iff$ minst én variabel-kolonne uten pivot = minst én fri variabel

} konsistent

$$\boxed{\text{Antall frihetsgrader} = \text{antall frie variabler} = \underbrace{n}_{\text{antall ukjente}} - \text{antall pivotposisjoner}}$$

1 Matriser og vektorer

Defn: En $m \times n$-matrise er en rektangulær tabell med tall-verdier som består av <u>m rader</u> og <u>n kolonner</u>.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ← stor bokstav for matriser : A

2×3-matrise

a_{12} : rad 1, kolonne 2 i A.

A er <u>kvadratisk</u> hvis $m = n$ (# rader = # kolonner)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ← kvadratisk matrise

3×3-matrise

Defn. En <u>vektor</u> er en matrise med 1 kolonne, en <u>n-vektor</u> er en $n \times 1$-matrise

Eks: $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ← liten understreket bokstav for vektorer, evt uthevet $\mathbf{v}$, eller $\vec{v}$

3-vektor

$v_2 = 4$

Skriver: $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Eks. $2A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

matrise

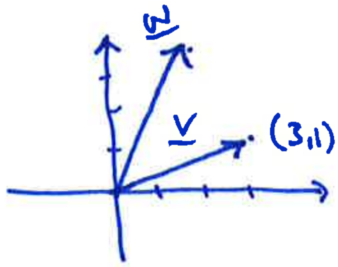
tall

vektorer

Geometrisk:

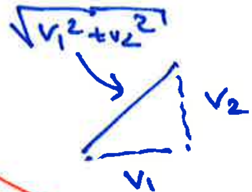
$n=2$: $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$



Lengden til en vektor:

$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$: $\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$



Eks: $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \|\underline{v}\| = \sqrt{3^2+1^2} = \underline{\sqrt{10}}$

$\underline{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \|\underline{w}\| = \sqrt{4^2+2^2} = \underline{\sqrt{20}}$

Skrivemåte for lengden til en vektor $\|\underline{v}\|$

Determinant av 2×2-matriser:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $\boxed{\det(A) = |A| = ad - bc}$

defn. på determinant for 2×2-matriser

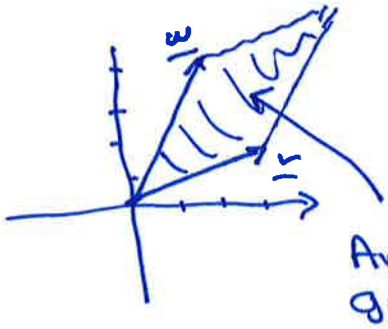
Eks: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$: $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$

$= 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = \underline{\underline{10}}$

kolonnene i A er vektorer

$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

de utspenner et parallellogram



Arealet av parallellogrammet er

$\pm |A|$

$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 12 = \underline{-10}$

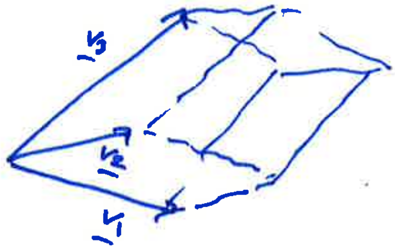
Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/

Eks: $n=3$

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix} = \; ? \quad 18+3+4-2-12-9 = \underline{\underline{2}}$$
$$\begin{matrix}1&1&1\\1&2&4\end{matrix}$$

Geometrisk tolkning:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}$$



parallellepiped

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix} = \pm \text{ volumet av parallellepiped}$$

Formel for determinant:

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix} = a\cdot e\cdot i + b\cdot f\cdot g + c\cdot d\cdot h - c\cdot e\cdot g - a\,f\,h - b\,d\,i$$
$$\begin{matrix}a&b&c\\d&e&f\end{matrix}$$

denne metoden fungerer kun for $n=3$

Lengden til en n-vektor:

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} \quad \text{når} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix}v_1\\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix}$$

Metode: Determinanter ved Kofaktor-utvikling

generell metode for å regne ut determinanter

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det(A) = |A|$$

$n \times n$-matrise; et tall

n=2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

n=3: "positive og negative diagonaler" eller **Kofaktor-utvikling**

n≥4: **kun** kofaktor-utvikling

Kofaktor

$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Metode: Kofaktor-utvikling

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

utvikling langs første rad

Tallene i raden: 1 1 1

Fortegn: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Minorer: $M_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & 2 & 4 \\ \cancel{1} & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$

$$|A| = +1 \cdot M_{11} - 1 \cdot M_{12} + 1 \cdot M_{13}$$

$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (18-12) - (9-4) + (3-2)$$

$$= 6 - 5 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

Defn: Minor M_{ij} = minor i posisjon (i,j) ← rad i kolonne j.
er determinanten til matrisen vi får når vi stryker rad i og kolonne j.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{4} \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 1 = \underline{\underline{8}}$

Defn: Kofaktor C_{ij} = kofaktoren i posisjon (i,j) ← rad i kolonne j

$$\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}} \longleftarrow (-1)^{i+j} = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \\ - & + & - & + & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Eks: $A = \begin{pmatrix} \cancel{1} & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{4} \\ \cancel{1} & 3 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -(9-3) = \underline{\underline{-6}}$

Defn: Kofaktorutvikling langs første rad:

$$|A| = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13} \qquad (n=3)$$

Resultat: A $n \times n$-matrise
Vi kan gjøre kofaktor-utvikling langs en vilkårlig rad eller kolonne, og svaret er alltid $|A|$.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = 7 \cdot C_{13} + 0 \cdot C_{23} + 1 \cdot C_{33}$$

$$= +7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 7(3-(-4)) + 1 \cdot (-1-12) = 49 - 13 = \underline{\underline{36}}$$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 2 - \cancel{3 \cdot 0}) = 1 \cdot 1 \cdot 2 = \underline{\underline{2}}$$

Resultat: Hvis A er en kvadratisk matrise på trappeform, så er $|A| = \underbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}}_{\text{produktet av tallene på diagonalen}}$

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} \quad -2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= +1\cdot\left(1\cdot(6-(-25))\right) - 2\left(-2\cdot(6-(-25))\right)$$

$$= 1\cdot 1\cdot 31 + (-2)(-2)\cdot 31 = 1\cdot 31 + 4\cdot 31 = 5\cdot 31 = \underline{\underline{155}}$$

Alternativ metode: Gauss

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3 \\ -5 \end{matrix} \rightarrow \overset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & -22 & -10 \\ 0 & -35 & -19 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \\ \\ -\frac{35}{22} \end{matrix} \rightarrow \overset{C}{\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & -22 & -10 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}}$$

$$* = -19 + 4\cdot\left(-\frac{35}{22}\right)$$

$$|A| = |B| = |C|$$

$$|A| = |B| = 1\begin{vmatrix} -22 & -10 \\ -35 & -19 \end{vmatrix} = 22\cdot 19 - 10\cdot 35$$

$$= 418 - 350 = \underline{\underline{68}}$$

Resultat: $A \to B$ elementær radoperasjon

i) Bytter om to rader: $|B| = -|A|$

ii) Multipliserer en rad med $c \neq 0$: $|B| = c\cdot|A|$

iii) Legge til $c\cdot$ en rad i en annen rad: $|B| = |A|$

③ Determinanter og lineære system

La oss se på et lineært system med like mange likninger som ukjente:

$$\boxed{\begin{matrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix}}$$

$$A = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}^{n} \Big\}\, n \longrightarrow |A|$$

koeff. matrisen til systemet
(uten siste kolonne)

Resultat:

$|A| \neq 0 \iff$ Én løsning

$|A| = 0 \iff \begin{cases} \text{ingen løsninger} \\ \quad\text{eller} \\ \text{uendelig mange løsninger} \end{cases}$