Plan:

(1) Integrasjon: Økonomiske anvendelser

(2) Likningssystemer

(1.5) Partiell derivasjon (pga andre kurs, kommer tilbake til dette i matematikk i Kap. 7)

Repetisjon:

a) **Bestemte integral:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

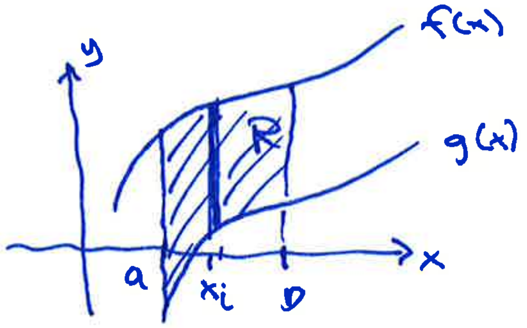
når $F'(x)=f(x)$

$F(x)$ er antiderivert til $f(x)$

$\Updownarrow$

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

b) **Areal beregning:**



R: $a \le x \le b$

$g(x) \le y \le f(x)$

Området mellom $f(x)$ og $g(x)$ i intervallet $[a,b]$

Anta: $f(x) \ge g(x)$ for $a \le x \le b$

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)-g(x)\,dx \quad \text{arealet av området } R}$$

Riemann-summer:

Vi deler $[a,b]$ i n delintervaller med bredde $\frac{b-a}{n} = \Delta x$

delepunkt: $x_i = a + i\cdot\Delta x$

$$\sum_{i=1}^{n}\Big[\underbrace{f(x_i)-g(x_i)}_{\text{høyde}}\Big]\cdot\Delta x \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b \underbrace{f(x)-g(x)}_{\text{høyde}}\,dx$$

c) Anvendelser:

i) Kontinuerlige kontantstrømmer

ii) Sannsynlighet for kontinuerlige stokastiske variabler

iii) Konsument/produsent overskudd

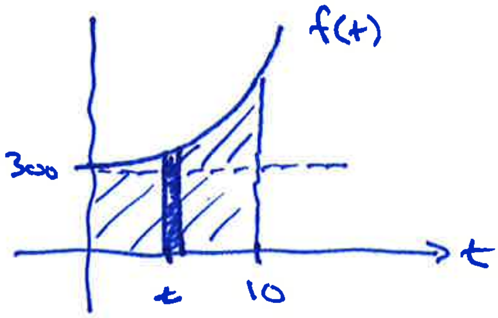
} Summerer ting som varierer kontinuerlig.

1 Økonomiske anvendelser

i) Inntektsstrøm: $f(t) = 300 \cdot 1{,}06^t$ mill. kr/år

Samlet inntekt i løpet av ti år:

$$I = \int_0^{10} f(t)\cdot dt = \int_0^{10} 300 \cdot 1{,}06^t \, dt$$



$$= \int_0^{10} 300 e^{at} \, dt$$

$$= \left[300 \cdot \frac{1}{a} e^{at} \right]_0^{10}$$

$$= \frac{300}{a} e^{10a} - \frac{300}{a} \cdot e^0$$

$$= \frac{300}{a} \left(e^{10a} - 1 \right) = \frac{300}{\ln 1{,}06} \left(1{,}06^{10} - 1 \right)$$

$$\simeq \underline{\underline{4.072 \text{ mill. kr}}}$$

$$1{,}06^t = e^{\ln(1{,}06^t)} = e^{t \cdot \ln 1{,}06} = e^{at}, \quad a = \ln(1{,}06) \simeq 0.058$$

$$a - r = \ln 1{,}06 - 0.04 \simeq 0.018$$

Nåverdi: kontinuerlig diskontering med $r = 0.04$

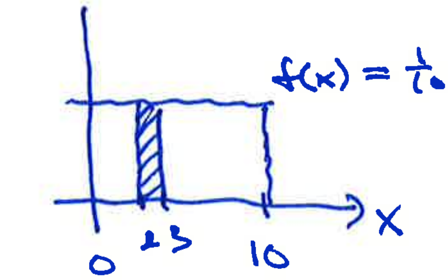
$$N = \int_0^{10} 300 \cdot e^{at} \cdot e^{-rt} \, dt = \int_0^{10} 300 \, e^{(a-r)t} \, dt$$

$$= \frac{300}{a - 0{,}04} \cdot \left(e^{10(a-r)} - 1 \right) \cong \underline{\underline{3.292 \text{ mill. kr}}}$$

ii) Sannsynlighet for kont. stokastiske variabler:

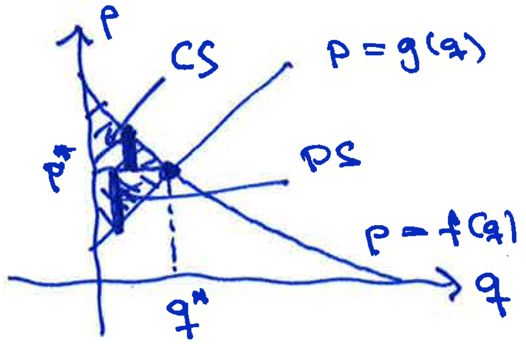
$X(S) = [0,10]$

uniform sannsynlighet = "alle utfall like sannsynlige".



$$P(2 \leq X \leq 3) = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \frac{1}{10}\,dx = \left[\frac{x}{10}\right]_2^3 = \frac{3}{10} - \frac{2}{10} = \underline{\underline{\frac{1}{10}}}$$

iii) Konsument / produsent overskudd



p : pris
q : kvantum
$f(q)$: "etterspørselsf. (omvendt)
$g(q)$: tilbudsfunksjon (omvendt)

CS (consumer surplus):

$$CS = \int_0^{q^*} f(q) - p^* \, dq \qquad PS = \int_0^{q^*} p^* - g(q)\, dq$$

Oppsummering: sum av uendelig mange uendelig små størrelser (størrelser i kontinuerlig endr.) blir et integral

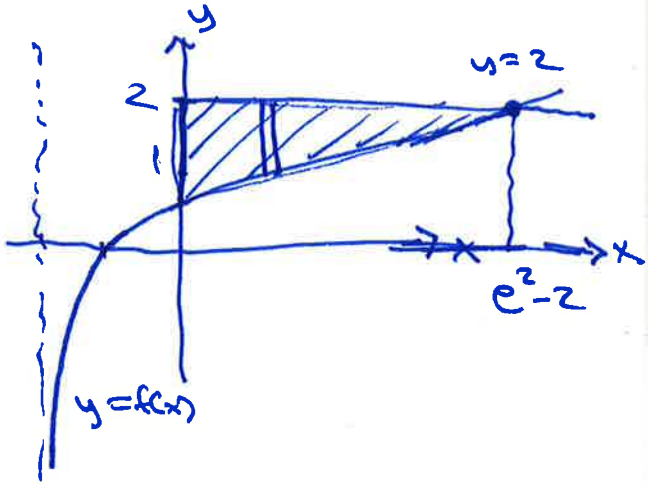
Nåverdi av kontantstrøm: $\int_{t_0}^{t_1} f(t) \cdot e^{-rt}\,dt$

- Kontinuerlig kontantstrøm.
- kontinuerlig diskontering

t_0 : starttidspunkt. t_1 : slutt tidspunkt. $f(t)$: kontantstrøm. r : diskonteringsrente

Oppgaveark 19

7) R: begrenset av grafen til $f(x) = \ln(2+x)$, linjen $y=2$, og y-aksen



$$A(R) = \int_0^{e^2-2} 2 - f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{e^2-2} 2 - \ln(2+x)\,dx$$

$$= \Big[2x\Big]_0^{e^2-2} - \int_0^{e^2-2} \ln(2+x)\,dx$$

$$= 2(e^2-2) - \int_2^{e^2} \ln(u)\,du$$

$$= 2(e^2-2) - \Big[u\ln u - u\Big]_2^{e^2}$$

$$= 2(e^2-2) - \Big[(e^2\cdot 2 - e^2) - (2\ln 2 - 2)\Big]$$

$$= 2e^2 - 4 - e^2 + 2\ln 2 - 2$$

$$= \underline{\underline{e^2 + 2\ln 2 - 6}} \simeq 2.78$$

$\ln(2+x) = 2$

$2+x = e^2$

$x = e^2 - 2$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 2+x \\ du &= 1\cdot dx \end{aligned}}$$

$x=0 \Rightarrow u=2$

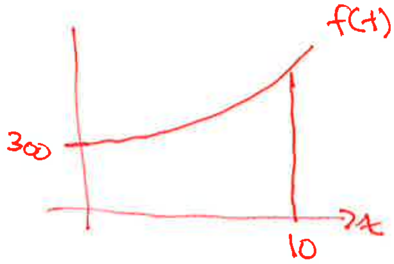
$x = e^2-2 \Rightarrow u = e^2$

$$\boxed{\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C}$$

$\int 1\cdot \ln x\,dx = \ldots$ delvis...

10)

$f(t) = 300 e^{\sqrt{t/10}}$



I løpet av 10 år:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sqrt{t/10} = \sqrt{t}/\sqrt{10} \\ du &= \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt \end{aligned}}$$

$t=0: \quad u=0$
$t=10: \quad u=1$

$u = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sqrt{t} = \sqrt{10}\, u$

$$\int_0^{10} f(t)\,dt = \int_0^{10} 300 e^{\sqrt{t/10}}\,dt$$
$$= \int_0^1 300 e^u \sqrt{10} \cdot 2\sqrt{t}\,du$$
$$= \int_0^1 300 e^u \sqrt{10} \cdot 2 \cdot \sqrt{10}\, u\,du$$
$$= 300 \cdot 2 \cdot 10 \int_0^1 u e^u\,du$$
$$= 6000 \cdot \left[u e^u - e^u \right]_0^1$$
$$= 6000 \cdot \left((\cancel{1 \cdot e^1 - e^1}) - (\cancel{0 \cdot e^0} - e^0) \right) = \underline{\underline{6000}} \text{ mill. kr}$$

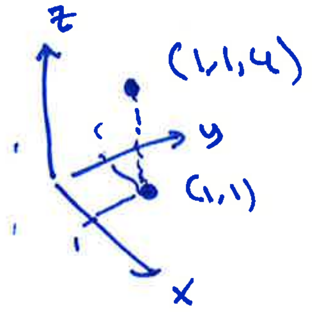
I løpet av de første 2 årene:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{10}} \\ du &= \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt \end{aligned}}$$

$t=0 \quad : \quad u=0$
$t=2 \quad : \quad u=\sqrt{2/10}$

$$\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^2 300 e^{\sqrt{t/10}}\,dt$$
$$= \int_0^{\sqrt{2/10}} 6000\, u e^u\,du$$
$$= 6000 \left[u e^u - e^u \right]_0^{\sqrt{2/10}}$$
$$= 6000 \cdot \left(\sqrt{\tfrac{2}{10}}\, e^{\sqrt{2/10}} - e^{\sqrt{2/10}} + 1 \right) \simeq \underline{\underline{813}} \text{ mill. kr.}$$

1.5 Partiell derivasjon



Eks: $f(x,y) = 2x+3y-1$

lineær funksjon

input: x, y
output: z

$f(1,1) = \underline{4}$

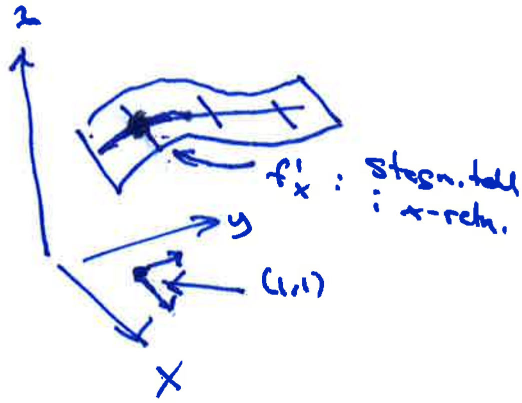
$z = f(x,y)$
grafen til f
(flate i det 3d. rommet)

$$f'_x = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$
$$f'_y = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Eks: $f(x,y) = 2x+3y-1$

$f'_x = 2\cdot 1 + 3\cdot 0 = \underline{\underline{2}}$

$f'_y = 2\cdot 0 + 3\cdot 1 = \underline{\underline{3}}$



Husk: f'_x : y konstant
$(x)'_x = 1 \quad (y)'_x = 0$

f'_y : x konstant
$(x)'_y = 0 \quad (y)'_y = 1$

Eks: $f(x,y) = x^2+y^2-1$

$f'_x = 2x$

$f'_y = 2y$

Eks: $f(x,y) = x^2+y^2-3xy$

$f'_x = 2x + 0 - (3y\cdot x)'_x$
$= 2x - 3y\cdot 1 = \underline{2x-3y}$

$f'_y = 0 + 2y - 3x\cdot 1 = \underline{2y-3x}$

Eks: $f(x,y) = e^{2x+3y} = e^{u}$, $\underline{u = 2x+3y}$

$f'_x = e^u \cdot u'_x = e^u \cdot 2 = \underline{2 \cdot e^{2x+3y}}$

$f'_y = e^u \cdot u'_y = e^u \cdot 3 = \underline{3 \cdot e^{2x+3y}}$

Eks: $f(x,y) = 7 \cdot x^{1.4} y^{2.1}$

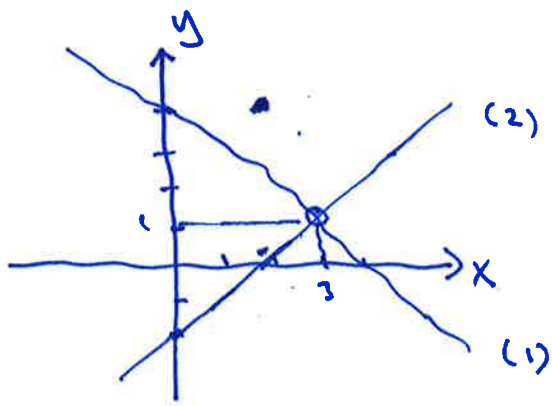
$f'_x = 7 \cdot y^{2.1} (1.4 x^{0.4}) = \underline{9.8 x^{0.4} y^{2.1}}$

$f'_y = 7 \cdot x^{1.4} \cdot (2.1 \cdot y^{1.1}) = \underline{14.7 x^{1.4} y^{1.1}}$

2. Likningssystemer

Eks: $x + y = 4$ (1)
$x - y = 2$ (2)

2 likn., 2 ukjente
lineære



(1) $x + y = 4$
$y = 4 - x$
rett linje

(2) $x - y = 2$
$\dfrac{-y}{-1} = \dfrac{-x+2}{-1}$
$y = \underline{x - 2}$
rett linje

Løsn:
$(x,y) = \underline{\underline{(3,1)}}$

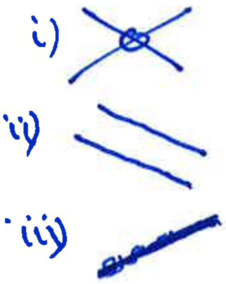
Defn:
En løsning av et likningssystem er et tallpar (x,y) som passer i alle likningene.

Et lineært likningssystem med to likninger og to ukjente, så har systemet

i) én løsning

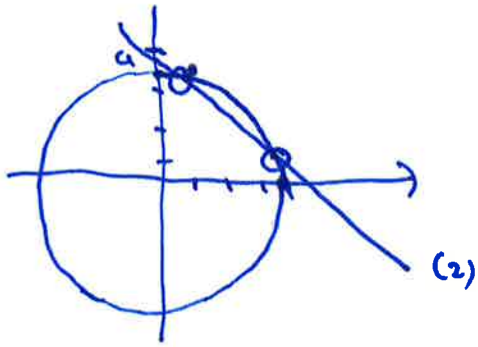
ii) ingen løsninger

iii) uendelig mange løsninger



Eks: $x^2+y^2=10$ (1)

$x+y=4$ (2)



(1) $x^2+y^2=10$

sirkel med $r=\sqrt{10}$

senter $(0,0)$

Muligheter:

- to løsninger
- én løsning
- ingen løsn.

Innsettingsmetoden:

- Løser én av likn. for én av variablene, og setter inn i den andre likn.

Eks: $x^2+y^2=10$

$x+y=4$

(2) $y=4-x$

$\Downarrow$

(1) $x^2+y^2=10$

$x^2+(4-x)^2=10$

$x^2+16-8x+x^2=10$

$2x^2-8x+6=0$

$x^2-4x+3=0$

$x=1$	$x=3$
$y=3$	$y=1$

To løsn.:

$(x,y)=(1,3),(3,1)$

to løsninger.

Eks:
$$x+y+z=4 \quad (1)$$
$$x+2y+4z=8 \quad (2)$$
$$x+3y+9z=14 \quad (3)$$

$$z=4-x-y$$

3 likn, 3 ukjente
lineære likn.

Innsettingsmetoden:

(1) $\boxed{z=4-x-y}$

(2) $x+2y+4z=8$

$x+2y+4(4-x-y)=8$

$-3x-2y=-8$

(3) $x+3y+9z=14$

$x+3y+9(4-x-y)=14$

$-8x-6y=-22$

$$-3x-2y=-8$$
$$-8x-6y=-22$$

$$\frac{-2y}{-2}=\frac{-8+3x}{-2}$$

$$\boxed{y=4-\tfrac{3}{2}x}$$

$$-8x-6\left(4-\tfrac{3}{2}x\right)=-22$$
$$-8x-24+9x=-22$$
$$x=2$$

$x=2$
$y=1$
$z=1$

Løsn: $(x,y,z)=(2,1,1)$