Plan:

[E] 5.6-5.7

1. Bestemte integral
2. Arealberegning ved hjelp av integrasjon
3. Uegentlige integral
4. Økonomiske anvendelser ← Fortsetter med anvendelser neste gang.

Repetisjon:

Delvis integrasjon:

$$\boxed{\int u' \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx}$$

Eks: $\int \sqrt{x} \cdot \ln x \, dx = \frac{2}{3}x^{3/2} \cdot \ln x - \int \frac{2}{3}x^{3/2} \cdot \frac{1}{x} \, dx$

$u = \frac{2}{3} \cdot x^{3/2}$ $\quad v = \ln x$

$u' = x^{1/2}$ $\quad v' = 1/x$

$= \frac{2}{3} x\sqrt{x} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{1/2} dx$

$= \frac{2}{3} x\sqrt{x} \ln x - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} x^{3/2}\right) + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} x\sqrt{x} + C$

Integrasjon av rasjonale uttrykk:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = ?$$

1. Hvis grad til $p \geq$ grad til q: polynomdivisjon
   → resultatet er et integral av: polynom $+ \frac{\text{rest}}{q(x)}$ ← grad til rest < grad til $q(x)$

2. Hvis nevner er lineær: (grad 1)

$$\int \frac{A}{ax+b} dx = \frac{A}{a} \ln|ax+b| + C$$

Substitusjonen
$u = ax+b$
$du = a \cdot dx$

③ Grad til nevner = 2 :

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$$

delbrøksoppspalting

i) $\int \frac{p(x)}{(x-a)(x-b)}\,dx = \int\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\right)dx$ hvis $a \neq b$

ii) $\int \frac{p(x)}{(x-a)^2}\,dx = \int\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}\right)dx$

(iii) $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x)+C$) hvis nevneren ikke kan faktoriseres

Oppg. 9.

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}\,dx = \boxed{\begin{matrix} u=\sqrt{x} \\ du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\end{matrix}}$$

$$\int \frac{u+1}{1-u}\cdot 2\sqrt{x}\,du = \int \frac{u+1}{1-u}\cdot 2u\,du$$

$$= \int \frac{2u^2+2u}{1-u}\,du = \int -2u-4+\frac{4}{1-u}\,du$$

$(2u^2+2u):(-u+1) = -2u-4$
$2u^2-2u$
$4u$
$4u-4$
4

$$= -u^2-4u+\frac{4}{-1}\cdot\ln|1-u|+C$$

$$= -x-4\sqrt{x}-4\ln|1-\sqrt{x}|+C$$

Alt: $\boxed{\begin{matrix} u=1-\sqrt{x} \\ du=-\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\end{matrix}}$

$\sqrt{x}=1-u$

$$= \int \frac{\sqrt{x}+1}{u}\cdot(-2\sqrt{x})\,du = \int \frac{-2x-2\sqrt{x}}{u}\,du$$

$$= \int \frac{-2\cdot(1-u)^2-2(1-u)}{u}\,du = \int \frac{-4+6u-2u^2}{u}\,du$$

$$= \int -\frac{4}{u}+6-2u\,du = -4\ln|u|+6u-u^2+C$$

$$= -4\ln|1-\sqrt{x}| + 6(1-\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x})^2 + C$$

$$= -4\ln|1-\sqrt{x}| + 6 - 6\sqrt{x} - 1 + 2\sqrt{x} - x + C$$

$$= \underline{-4\ln|1-\sqrt{x}| - x - 4\sqrt{x} + (5+C)}$$

—

7. $\int 2x^3 e^{-x^2}\,dx = \int \cancel{2}x^{\cancel{3}\,2} \cdot e^u \cdot \frac{du}{-\cancel{2x}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = -x^2 \\ du = -2x\,dx \end{array}}$$

$$= \int -x^2 e^u\,du = \int u e^u\,du \underset{\text{delvis}}{=} ue^u - e^u + C$$

$$= \underline{\underline{-x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + C}}$$

—

Eks. $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}\,dx$

$$= \int \frac{1}{x-3} + \frac{-1}{x-2}\,dx = \underline{\underline{\ln|x-3| - \ln|x-2| + C}}$$

Delbrøksoppspalting:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-4\cdot 6}}{2} = 3, 2$

$\Downarrow$

$(x-3)(x-2)$

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} \quad | \cdot (x-3)(x-2)$$

$$1 = A(x-2) + B(x-3)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underline{x=2}: & 1 = B\cdot(-1) \Rightarrow B = -1 \\ \underline{x=3}: & 1 = A\cdot 1 \qquad A = 1 \end{array}}$$

$$1 = (A+B)x + (-2A-3B)$$

$A + B = 0 \qquad B = -A$

$-2A - 3B = 1 \qquad -2A - 3(-A) = 1 \qquad \underline{B=-1}$, $\underline{A=1}$

① Bestemte integraler:

Defn: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

når $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$, dvs $\int f(x)dx = F(x) + C$

Eks: $\int_0^2 x^2 - 3\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x + C\right]_0^2$

Bestemte integral er alltid uavhengig av C!

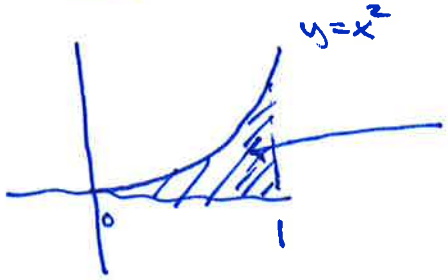
$= \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - 3\cdot 2 + \cancel{C}\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0^3 - 3\cdot 0 + \cancel{C}\right)$

$= \frac{8}{3} - 6 = \frac{8}{3} - \frac{18}{3} = \underline{\underline{-\frac{10}{3}}} \simeq -3.33$

Generelt: $f(x)$ kontinuerlig funksjon på $\underline{a \le x \le b}$ $\rightsquigarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ $\underline{\text{et tall}}$

② Areal beregning:

Eks: $f(x) = x^2$ på intervallet $[0,1]$

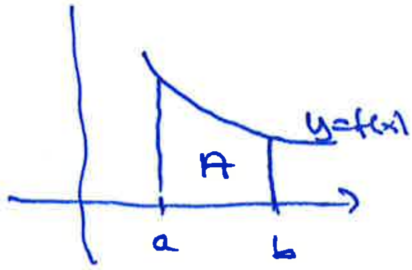


Arealet mellom $y = x^2$ og x-aksen i intervallet $[0,1]$

= "arealet under grafen"

Anta: $f(x) \geq 0$ og kont. på $[a,b]$

For å definere arealet under grafen bruker vi Riemann-summer:



* Vi deler $I=[a,b]$ i n like delintervaller med bredde $\frac{b-a}{n} = h$

$x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$

delepunkt

Riemannsum:

$$f(x_1)\cdot h + f(x_2)\cdot h + \dots + f(x_n)\cdot h$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot h = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\cdot\frac{b-a}{n}\right)\cdot \frac{b-a}{n}$$

$x_0 = a$

$x_1 = a+h$

$x_2 = a+2h$

$\vdots$

$x_n = b$

Defn: Arealet av området under grafen til f på $[a,b]$ er

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot h$$

Det er mulig å regne ut areal med stor nøyaktighet ved å bruke store verdier av n → lange summer

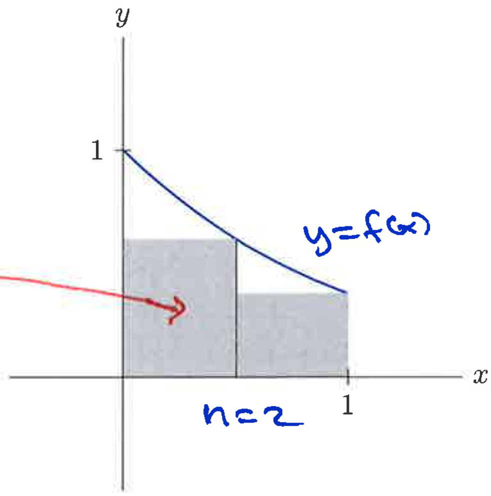
Eks: $f(x)=e^{-x}$ på $[0,1]$

Riemann-sum:

n=2:

$0.5\cdot e^{-0.5}+0.5\cdot e^{-1}$

$\simeq 0.487$

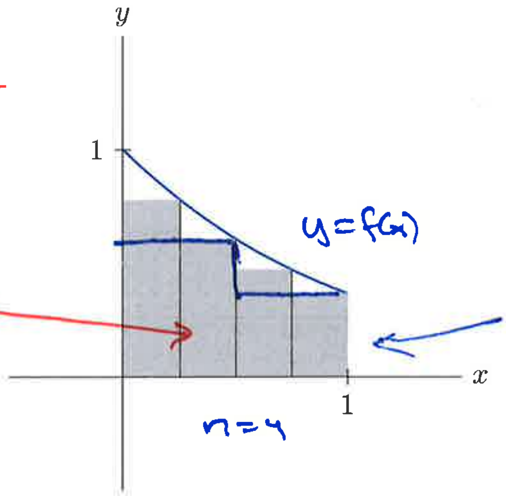


n=4:

$0.25\cdot e^{-0.25}+0.25\cdot e^{-0.5}$

$+0.25\cdot e^{-0.75}+0.25\cdot e^{-1}$

$\simeq 0.556$



$\simeq 0.556$

n=8:

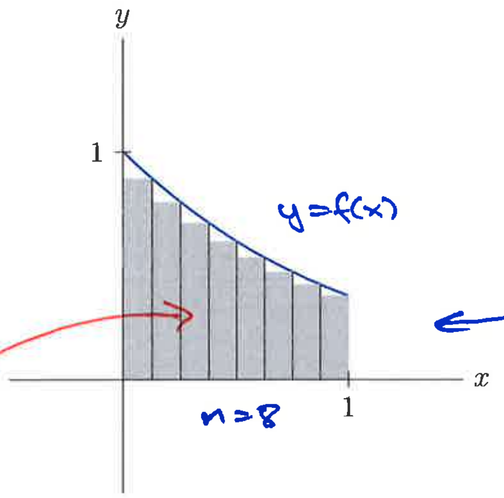
$0.125\cdot e^{-0.125}+0.125\cdot e^{-0.25}$

$+0.125\cdot e^{-0.375}+0.125\cdot e^{-0.5}$

$+0.125\cdot e^{-0.625}+0.125\cdot e^{-0.75}$

$+0.125\cdot e^{-0.875}+0.125\, e^{-1}$

$\simeq 0.593$



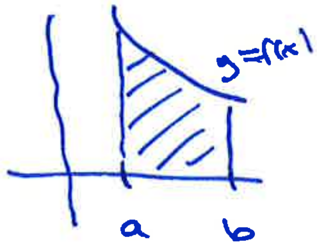
$\simeq 0.593$

Areal vha integrasjon:

$A=\int_0^1 e^{-x}\,dx$

$=\left[-e^{-x}\right]_0^1=-\frac{1}{e}+1=1-\frac{1}{e}\simeq 0.632$

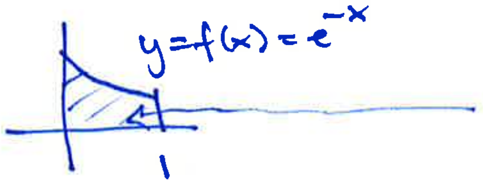
Integralregningens fundamentalsats:



Hvis $f(x)$ er kontinuerlig med $f(x) \geq 0$ på intervallet $[a,b]$, så er arealet under grafen til f på $[a,b]$ gitt ved

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Eks:



$$A = \int_0^1 e^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}\Big]_0^1$$

$$= \left(-e^{-1}\right) - \left(-e^{-0}\right)$$

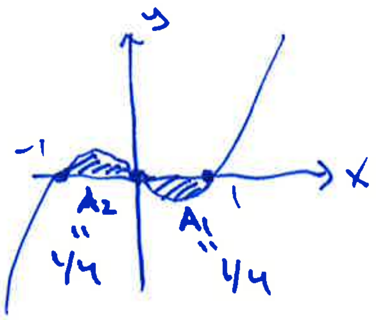
$$= -\frac{1}{e} + 1 = \underline{\underline{1 - 1/e}}$$

$$\simeq \underline{\underline{0.632}}$$

Eks.

$$\int_{-1}^{1} x^3 - x\,dx = \Big[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 1^4 - \tfrac{1}{2}\cdot 1^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot(-1)^4 - \tfrac{1}{2}(-1)^2\right) = \underline{\underline{0}}$$



$x^3 - x = 0$

$x\cdot(x^2-1) = 0$

$x=0,\ x=1,\ x=-1$

$$A = A_1 + A_2 = \underline{\underline{1/2}}$$

$$\int_0^1 x^3 - x\,dx = \Big[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$

$$= (1/4 - 1/2) - 0 = \underline{-1/4}$$

$$\underline{A_1 = 1/4}$$

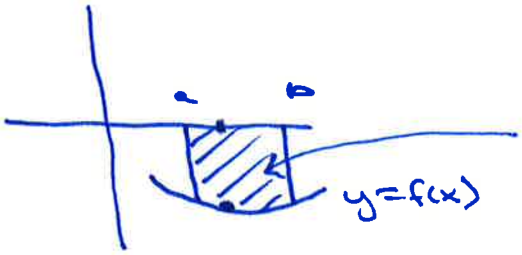
$$\int_{-1}^{0} x^3 - x\,dx = \dots = \underline{1/4}$$

Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/

Resultat: Hvis $f(x) \leq 0$ på $[a,b]$, så er

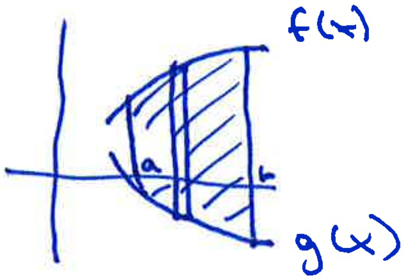
$$\int_a^b f(x)\,dx = -A$$

der A er arealet mellom x-aksen og $y=f(x)$



$$A = \int_a^b \underbrace{-f(x)}_{0-f(x)}\,dx$$

Resultat: Areal mellom $f(x)$ og $g(x)$ på $[a,b]$, hvis $f(x) \geq g(x)$, er gitt som



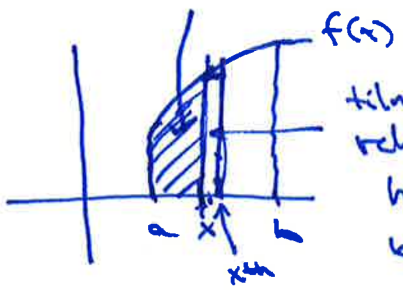
$$A = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

Summen fra $x=a$ til $x=b$ av uendelig mange uendelig smale bokser med høyde $f(x)$ og bredde dx

Bevis for fundamentalsatsen:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

$A(x)$



tilnærmet lik rektangel med
$h = f(x)$
$b = h$

Hovedlinjer:

For $a \leq x \leq b$, $A(x)$ = arealet under grafen til $f(x)$ i $[a,x]$

$A(a) = 0$
$A(b) = A$

Påstand: $A'(x) = f(x)$

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \approx \frac{f(x)\cdot \cancel{h}}{\cancel{h}} = f(x)$$

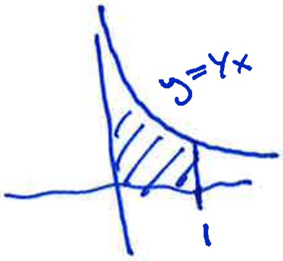
$$\lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [A(x)]_a^b = A(b) - A(a) = A - 0 = \underline{\underline{A}}$$

③ Uegentlige integral:

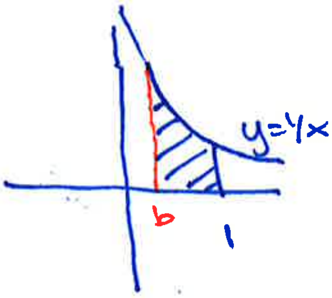
Eks: $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln x\Big]_0^1 = \ln(1) - \ln(0)$

$= 0 - ?$



$\frac{1}{x}$ er ikke kont. på $[0,1]$

(ikke def. i $x=0$)



$b>0$ lite tall:

$\int_b^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln x\Big]_b^1 = \ln 1 - \ln b$

$= -\ln b$

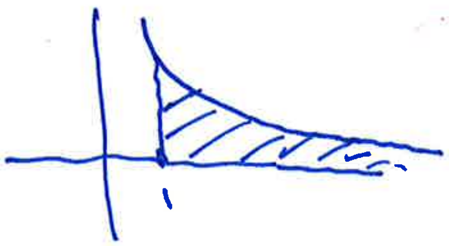
$\lim_{b\to 0^+} \int_b^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to 0^+} -\ln b = \infty$

Eks: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^\infty =$

" $\left(-\frac{1}{\infty}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{\infty}$ "

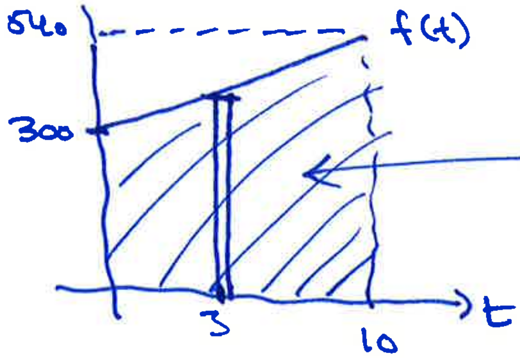
$= \lim_{b\to\infty} \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b} + 1\right)$

$= 1$



4 Økonomiske anvendelser

Eks: Eiendomsselskap med leieinntekter på 300 mill. kr / år, som øker jevnt til 540 mill. kr / år etter 10 år.



areal = samlet leieinntekt

$t=3$: $f(3) = 372 \frac{\text{mill kr}}{\text{år}}$

Neste mnd:

Leieinntekt $\simeq$

$372 \text{ mill. kr/år} \cdot \frac{1}{12} \text{ år}$

$= 31 \text{ mill kr}$

$$f(t) = 300 + 24t$$

Sum (10 år) $= \int_0^{10} f(t)\,dt = \int_0^{10} 300 + 24t\,dt$

$$= \left[300t + 12t^2\right]_0^{10} = (3000 + 1200) - 0$$

$$= 4200 \text{ mill kr}$$

Sum: $t=3$ til $t = 3 + \frac{1}{12}$

$$\int_3^{37/12} f(t)\,dt = \left[300t + 12t^2\right]_3^{37/12} =$$

$$\left(300 \cdot 37/12 + 12 \cdot (37/12)^2\right) - \left(300 \cdot 3 + 12 \cdot 3^2\right)$$

$$= 300 \cdot \frac{1}{12} + 12\left(\left(\frac{37}{12}\right)^2 - 3^2\right) \simeq 31{,}083 \text{ mill kr}$$