Eksamen i ELE3719 Matematikk valgfag

onsdag 15. mai 2024, kl. 9-14

Oppgavesettet har 15 underpunkter som alle vektes likt.
Vedlagte formelsamling er på 1 side.

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

Vi har vektorer

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 8 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{u}_5 = \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

a) Løs vektorlikningen

$$x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3 + x_4\boldsymbol{u}_4 + x_5\boldsymbol{u}_5 = \mathbf{0}$$

Avgjør om $\boldsymbol{u}_1$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$ og $\boldsymbol{u}_5$.

b) Finn en basis for $\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5\}$. Avgjør om vektorene $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_5\}$ er lineært uavhengige. Avgjør om det finnes en vektor $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ som både ligger i $\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_5\}$ og i $\text{Span}\{\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_4\}$.

Oppgave 2

Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 52 & -36 & 0 \\ -36 & 73 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

b) Finn en ortogonal (3×3)-matrise P slik at $P^TAP = D$ er en diagonalmatrise og bestem D.

Vi har andregradsfunksjonen

$$f(x_1, x_2, x_3) = 52x_1^2 + 73x_2^2 - x_3^2 - 72x_1x_2 - 1200x_1 + 350x_2 + 48x_3 + 2024$$

c) Bestem de stasjonære punktene til $f(x_1, x_2, x_3)$ og avgjør om de er maksimum- eller minimumspunkter, eller ingen av delene.

d) Løsningene til likningen $52x_1^2 + 73x_2^2 - 72x_1x_2 = 2500$ gir en skrå ellipse. Finn nye koordinater y_1 og y_2 slik at likningen for ellipsen med disse koordinatene er uten y_1y_2-ledd. Tegn det nye koordinatsystemet og ellipsen inn i (x_1, x_2)-koordinatsystemet.

Oppgave 3

Vi har to simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variabler X og Y som har simultan tetthetsfunksjon

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-0,5x}}{y^3} & \text{hvis } x \geqslant 0 \text{ og } y \geqslant 1 \\ \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Beregn sannsynlighetene
   i) $P(X \leqslant 2\,, Y \leqslant 3)$ ii) $P(X \geqslant 2\,, Y \geqslant 3)$

b) Bestem den marginale sannsynlighetstettheten $f_X(x)$. Beregn første kvartil (dvs 25. prosentil) til X.

c) Avgjør om X og Y er uavhengige stokastiske variabler.

d) La Z være den stokastiske variabelen $Z = X + Y$. Beregn forventningsverdien $\mathrm{E}(Z)$.

Oppgave 4

Vi lar y betegne en funksjon av t, dvs $y = y(t)$.

a) Løs differensiallikningen $y' + y = 2te^{-t} + 2024$. Finn likevektstilstanden og bestem om differensiallikningen er globalt asymptotisk stabil.

b) Løs differensiallikningen $e^y y' = e^t$.

Oppgave 5

Vi lar y og u betegne funksjoner av t, dvs $y = y(t)$ og $u = u(t)$.

a) Løs differensiallikningen $9y'' = y$ med initialbetingelsene $y(0) = 2$ og $y'(0) = 0$.

b) Vi har kontrollproblemet

$$\text{maks} \int_0^1 15 - 9y^2 - u^2 \, \mathrm{d}t \quad , \qquad \begin{cases} y' = u & (1) \\ y(0) = 2 & (2) \\ y'(0) = 0 & (3) \end{cases}$$

   Bruk Pontryagins maksimumsprinsipp til å finne en normal løsning på kontrollproblemet (bestem både y og u).

c) Gjør kontrollproblemet om til et variasjonsproblem og bruk Euler-likningen til å løse dette.

Formelsamling

Matrisemetoder

Partiell derivasjon Funksjonen

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x} + c$$

hvor A er en symmetrisk matrise har partiell-deriverte gitt ved vektoren

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = 2A\boldsymbol{x} + B^T$$

Integrasjonsmetoder

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, \mathrm{d}t = uv - \int uv' \, \mathrm{d}t$$

b) Substitusjonen $u = u(t)$:

$$\int f(u)u' \, \mathrm{d}t = \int f(u) \, \mathrm{d}u$$

Variasjonsregning og kontrollteori

Variasjonsregning Variasjonsproblemet

$$\max \int_a^b F(t, y, y') \, \mathrm{d}t$$

med initialbetingelsene $y(a) = y_0$ og $y(b) = y_1$ har Euler-likning

$$F'_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F'_{y'}) = 0$$

Optimal kontrollteori Kontrollproblemet

$$\max \int_a^b F(t, y, u) \, \mathrm{d}t$$

med

$$\begin{cases} y'(t) = G(t, y, u) & (1) \\ y(a) = y_0 & (2) \\ y(b) = y_1 & (3) \end{cases}$$

har Hamilton-funksjon

$$H(t, y, u, p) = p_0 F(t, y, u) + pG(t, y, u)$$

med $p_0 = 1$ (normal løsning)
eller $p_0 = 0$ (degenerert løsning)
med første ordens Pontryaginbetingelser

$$\begin{cases} H'_u = 0 & (4) \\ p'(t) = -H'_y & (5) \end{cases}$$