Eksamen i ELE3719 Matematikk valgfag
onsdag 15. mai 2024, kl. 9-14
LØSNINGFORSLAG

Oppgave 1

a) Vi løser vektorlikningen $x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3 + x_4\boldsymbol{u}_4 + x_5\boldsymbol{u}_5 = \boldsymbol{0}$ ved å gjøre elementære radoperasjoner på koeffisientmatrisen:

$$[\boldsymbol{u}_1 \vdots \boldsymbol{u}_2 \vdots \boldsymbol{u}_3 \vdots \boldsymbol{u}_4 \vdots \boldsymbol{u}_5] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & -9 \\ -2 & 4 & 8 & 4 & 2 \\ -3 & 6 & 15 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -4 \\ -3 & 6 & 15 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Denne matrisen er på trappeform med pivoter i de fire første kolonnene. Da får vi at $\underline{\underline{x_5 = t}}$ (en fri parameter), $\underline{\underline{x_4 = 5t}}$, $\underline{\underline{x_3 = 8t}}$, $\underline{\underline{x_2 = 13t}}$, $\underline{\underline{x_1 = 69t}}$. Hvis $t = 1$ får vi

$$69\boldsymbol{u}_1 + 13\boldsymbol{u}_2 + 8\boldsymbol{u}_3 + 5\boldsymbol{u}_4 + \boldsymbol{u}_5 = \boldsymbol{0}$$

som gir $\boldsymbol{u}_1$ som en lineærkombinasjon av $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$ og $\boldsymbol{u}_5$:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{-1}{69}(13\boldsymbol{u}_2 + 8\boldsymbol{u}_3 + 5\boldsymbol{u}_4 + \boldsymbol{u}_5).$$

b) En basis for Span$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5\}$ er gitt av kolonnevektorene med pivoter i trappeformen, dvs $\underline{\underline{\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}}}$.

De elementære radoperasjonene vi gjorde over gir:

$$[\boldsymbol{u}_1 \vdots \boldsymbol{u}_3 \vdots \boldsymbol{u}_5] = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -9 \\ -2 & 8 & 2 \\ -3 & 15 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v}_1 \vdots \boldsymbol{v}_3 \vdots \boldsymbol{v}_5]$$

Vektorlikningen

$$x_1\boldsymbol{u}_1 + x_3\boldsymbol{u}_3 + x_5\boldsymbol{u}_5 = \boldsymbol{0} \quad (*)$$

har de samme løsningene som vektorlikningen $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_3\boldsymbol{v}_3 + x_5\boldsymbol{v}_5 = \boldsymbol{0}$. Men fra siste rad $[0 \;\; 0 \;\; -5]$ får vi at $x_5 = 0$. Nest siste rad gir da $x_3 = 0$ og første rad gir da $x_1 = 0$. Fordi $(*)$ bare har den trivielle løsningen $x_1 = x_3 = x_5 = 0$ er vektorene $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_5\}$ lineært uavhengige.

I (a) fikk vi at $69\boldsymbol{u}_1 + 13\boldsymbol{u}_2 + 8\boldsymbol{u}_3 + 5\boldsymbol{u}_4 + \boldsymbol{u}_5 = \boldsymbol{0}$ som gir

$$69\boldsymbol{u}_1 + 8\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_5 = -13\boldsymbol{u}_2 - 5\boldsymbol{u}_4$$

Altså ligger

$$\boldsymbol{v} = -13\boldsymbol{u}_2 - 5\boldsymbol{u}_4 = -13 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ -9 \\ -72 \\ -83 \end{bmatrix}$$

i både Span$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_5\}$ og i Span$\{\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_4\}$. Dessuten er $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$.

Oppgave 2

a) Egenverdiene er løsningene av den karakteristiske likningen $\det(A - \lambda I) = 0$. Hvis vi utvikler determinanten langs siste rad får vi $(-1-\lambda)[(52-\lambda)(73-\lambda) - 36^2] = 0$. Da er enten $\underline{\underline{\lambda = -1}}$ eller $[(52-\lambda)(73-\lambda) - 36^2] = 0$, dvs $\lambda^2 - 125\lambda + 2500 = 0$, dvs $(\lambda - 25)(\lambda - 100) = 0$, dvs $\underline{\underline{\lambda = 25}}$ eller $\underline{\underline{\lambda = 100}}$.

Vi finner egenvektorer ved å løse likningsystemet $[A - \lambda I]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ for hver av egenverdiene. For $\lambda = 25$ får vi

$$A - 25I = \begin{bmatrix} 52-25 & -36 & 0 \\ -36 & 73-25 & 0 \\ 0 & 0 & -1-25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & -36 & 0 \\ -36 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 27 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 27 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som gir løsninger $x_2 = s$ for en fri parameter s, $x_3 = 0$ og $x_1 = 4s/3$. Vi får egenvektorer $\underline{\underline{s \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$ med egenverdi 25 for alle $s \neq 0$.

For $\lambda = 100$ får vi

$$A - 100I = \begin{bmatrix} -48 & -36 & 0 \\ -36 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & -101 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -48 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -101 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -48 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & -101 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som gir løsninger $x_2 = t$ for en fri parameter t, $x_3 = 0$ og $x_1 = -3t/4$. Vi får egenvektorer $\underline{\underline{t \begin{bmatrix} -3/4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$ med egenverdi 100 for alle $t \neq 0$.

For $\lambda = -1$ får vi

$$A + I = \begin{bmatrix} 53 & -36 & 0 \\ -36 & 74 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 53 & -36 & 0 \\ 0 & 2626/53 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som gir løsninger $x_3 = r$ for en fri parameter r, $x_2 = 0$ og $x_1 = 0$. Vi får egenvektorer $\underline{\underline{r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$ med egenverdi -1 for alle $r \neq 0$.

b) Egenvektorer til en symmetrisk matrise med ulike egenverdier er ortogonale. Vi velger derfor egenvektorer med lengde 1 og setter dem som kolonner i P som dermed blir en ortogonal matrise som diagonaliserer A.

$$P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{som gir} \qquad P^TAP = D = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

c) Stasjonære punkter for $f(\boldsymbol{x})$ er løsninger av matriselikningen $A\boldsymbol{x} = -\frac{1}{2}B^T$ der $B = [-1200 \;\; 350 \;\; 48]$. Bruker elementære radoperasjoner på matriseformen til likningssystemet.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 52 & -36 & 0 & 600 \\ -36 & 73 & 0 & -175 \\ 0 & 0 & -1 & -24 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 52 & -36 & 0 & 600 \\ 0 & 625/13 & 0 & 3125/13 \\ 0 & 0 & -1 & -24 \end{array}\right]$$

som gir $x_3 = 24$, $x_2 = 5$ og $x_1 = 15$. Så eneste stasjonære punkt er $(15, 5, 24)$.

Fordi A både har positive og negative egenverdier er det stasjonære punktet hverken et maksimumspunkt eller et minimumspunkt (så et salpunkt).

d) Setter $E = \frac{1}{5}\left[\begin{smallmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ som er en ortogonal matrise. Vi innfører nye koordinater y_1 og y_2 ved at $\boldsymbol{y} = E^T\boldsymbol{x}$ og altså $\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{y}$. Sett $C = \left[\begin{smallmatrix} 52 & -36 \\ -36 & 73 \end{smallmatrix}\right]$ og $Q(\boldsymbol{x}) = 52x_1^2 + 73x_2^2 - 72x_1x_2$. Da er

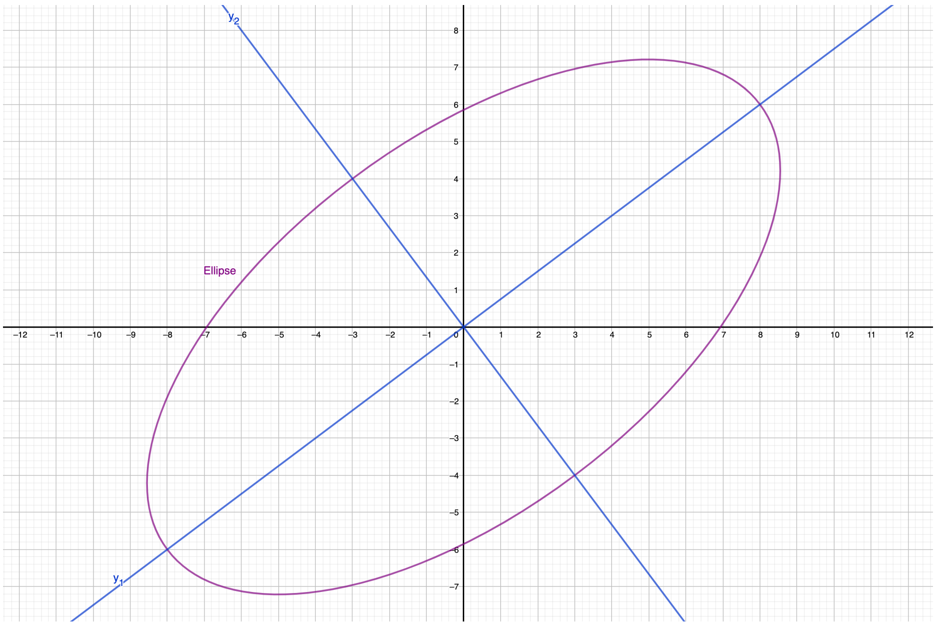
$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^TC\boldsymbol{x} = (E\boldsymbol{y})^TC(E\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T(E^TCE)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\left[\begin{smallmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 100 \end{smallmatrix}\right]\boldsymbol{y} = 25y_1^2 + 100y_2^2$$

Likningen $Q(\boldsymbol{x}) = 2500$ blir da til $Q^{\text{ny}}(\boldsymbol{y}) = 25y_1^2 + 100y_2^2 = 2500$. Deler vi med 2500 på begge sider får vi standardformen for ellipsen i (y_1, y_2)-koordinatsystemet uten kryssledd:

$$\frac{y_1^2}{100} + \frac{y_2^2}{25} = 1$$

dvs at halvaksene er $a = 10$ og $b = 5$ og sentrum er i origo.

Enhetsvektorer for de nye koordinataksene uttrykt i $\boldsymbol{x}$-koordinater er $E\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{5}\left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ og $E\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{5}\left[\begin{smallmatrix} -3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$. Ellipsen treffer y_1-aksen i ± 10 som i $\boldsymbol{x}$-koordinater da er $\pm 10 \cdot \frac{1}{5}\left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right] = \pm 2\left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right] = \pm\left[\begin{smallmatrix} 8 \\ 6 \end{smallmatrix}\right]$. Ellipsen treffer y_2-aksen i ± 5 som i $\boldsymbol{x}$-koordinater da er $\pm 5 \cdot \frac{1}{5}\left[\begin{smallmatrix} -3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right] = \pm\left[\begin{smallmatrix} -3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$. Vi kan da tegne det nye koordinatsystemet og ellipsen inn i (x_1, x_2)-koordinatsystemet.



Figur 1: Ellipse

Oppgave 3

a)

$$P(X \leqslant 2, Y \leqslant 3) = \int_1^3 \int_0^2 \frac{e^{-0,5x}}{y^3}\,dx\,dy = \int_1^3 \frac{1}{y^3} \int_0^2 e^{-0,5x}\,dx\,dy$$
$$= \int_1^3 \frac{1}{y^3}\left[-2e^{-0,5x}\right]_0^2 dy = \int_1^3 \frac{1}{y^3}\left[-2e^{-1} - (-2\cdot 1)\right] dy$$
$$= 2(1-e^{-1}) \int_1^3 \frac{1}{y^3}\,dy = 2(1-e^{-1})\left[\frac{-1}{2y^2}\right]_1^3 = 2(1-e^{-1})\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{18}\right)$$
$$= \underline{\underline{\frac{8}{9}(1-e^{-1})}}$$

$$P(X \geqslant 2, Y \geqslant 3) = \int_3^\infty \int_2^\infty \frac{e^{-0,5x}}{y^3}\,dx\,dy = \int_3^\infty \frac{1}{y^3} \int_2^\infty e^{-0,5x}\,dx\,dy$$
$$= \int_3^\infty \frac{1}{y^3}\left[-2e^{-0,5x}\right]_2^\infty dy = \int_3^\infty \frac{1}{y^3}\left[\left(\lim_{x\to\infty} -2e^{-0,5x}\right) - \left(-2\cdot e^{-1}\right)\right] dy$$
$$= 2e^{-1} \int_3^\infty \frac{1}{y^3}\,dy = 2e^{-1}\left[\frac{-1}{2y^2}\right]_3^\infty = 2e^{-1}\left(\left(\lim_{y\to\infty} \frac{-1}{2y^2}\right) - \frac{-1}{18}\right)$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{9e}}}$$

b)
$$f_X(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-0{,}5x}}{y^3}\,\mathrm{d}y = e^{-0{,}5x}\int_1^\infty \frac{1}{y^3}\,\mathrm{d}y = e^{-0{,}5x}\left[\frac{-1}{2y^2}\right]_1^\infty$$
$$= e^{-0{,}5x}\left(\left(\lim_{y\to\infty}\frac{-1}{2y^2}\right) - \frac{-1}{2}\right)$$
$$= \underline{\underline{0{,}5e^{-0{,}5x} \quad \text{for } x \geqslant 0 \text{ og } 0 \text{ ellers.}}}$$

Hvis $x = a$ er første kvartil er $\int_0^a f_X\,\mathrm{d}x = 0{,}25$, dvs $\int_0^a 0{,}5e^{-0{,}5x}\,\mathrm{d}x = 0{,}25$, dvs $\left[-e^{-0{,}5x}\right]_0^a = 0{,}25$, dvs $-e^{-0{,}5a} + 1 = 0{,}25$, dvs $e^{-0{,}5a} = 0{,}75$, dvs $-0{,}5a = \ln(0{,}75) = \ln\frac{3}{4}$, dvs $a = -2\ln\frac{3}{4} = \underline{\underline{2\ln\frac{4}{3}}}$.

c)
$$f_Y(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-0{,}5x}}{y^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y^3}\int_0^\infty e^{-0{,}5x}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{y^3}\left[-2e^{-0{,}5x}\right]_0^\infty$$
$$= \frac{1}{y^3}\left(\left(\lim_{x\to\infty} -2e^{-0{,}5x}\right) - (-2e^0)\right)$$
$$= \frac{2}{y^3} \quad \text{for } y \geqslant 1 \text{ og } 0 \text{ ellers.}$$

Altså er $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ og da er X og Y uavhengige stokastiske variabler.

d) Vi har
$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^\infty x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x\cdot 0{,}5e^{-0{,}5x}\,\mathrm{d}x$$
som ved delvis integrasjon er
$$\left[-xe^{-0{,}5x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-0{,}5x}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{e^{0{,}5x}} + 0 + \left[-2e^{-0{,}5x}\right]_0^\infty$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{e^{0{,}5x}} + \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{e^{0{,}5x}} - (-2) = 2 \quad \text{f. eks. ved l'Hôpitals regel.}$$

Vi har tilsvarende
$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^\infty y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_1^\infty y\frac{2}{y^3}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{-2}{y}\right]_1^\infty = 2$$

Altså er forventningsverdien $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = 2 + 2 = \underline{\underline{4}}$.

Oppgave 4

a) Dette er en lineær, første ordens differensiallikning. Vi multipliserer begge sider av likningen med den integrerende faktoren e^t og får $e^t y' + e^t y = 2t + 2024e^t$, dvs $(e^t y)' = 2t + 2024e^t$. Ved integrasjon får vi $e^t y = t^2 + 2024e^t + C$. Multiplikasjon på begge sider med e^{-t} gir $y(t) = t^2e^{-t} + 2024 + Ce^{-t} = \underline{\underline{\frac{t^2+C}{e^t} + 2024}}$.

Likevektstilstanden er grensen

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+C}{e^t}+2024=\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{e^t}+2024=\lim_{t\to\infty}\frac{2}{e^t}+2024=\underline{\underline{2024}}.$$

(bruker l'Hôpitals regel to ganger eller at e^t vokser mye raskere enn noe polynom).

Grensen 2024 er uavhengig av initialbetingelser (dvs av C) og derfor er differensiallikningen globalt asymptotisk stabil.

b) Dette er en separabel differensiallikning. Vi integrerer begge sider med hensyn på t: $\int e^y y'\,\mathrm{d}t = \int e^t\,\mathrm{d}t$. På venstresiden bruker vi substitusjonen $y = y(t)$ med $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}t$. Det gir $\int e^y y'\,\mathrm{d}t = \int e^y\,\mathrm{d}y = e^y + C_1$. Høyresiden er $\int e^t\,\mathrm{d}t = e^t + C_2$. Dette gir likningen $e^y = e^t + C$ (hvor $C = C_2 - C_1$). Setter begge sider inn i $\ln(x)$ og får $\underline{\underline{y(t) = \ln(e^t + C)}}$.

Oppgave 5

a) Dette er en lineær, homogen andre ordens differensiallikning som på standardform er $y'' - \frac{1}{9}y = 0$. Den karakteristiske likningen er $r^2 - \frac{1}{9} = 0$, dvs $r = \pm\frac{1}{3}$. Dette gir den generelle løsningen $y(t) = C_1 e^{\frac{1}{3}t} + C_2 e^{-\frac{1}{3}t}$ med $y'(t) = \frac{1}{3}C_1 e^{\frac{1}{3}t} - \frac{1}{3}C_2 e^{-\frac{1}{3}t}$. Initialbetingelsene

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{gir da likningene} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ \frac{1}{3}C_1 - \frac{1}{3}C_2 = 0 \end{cases}$$

Den andre likningen gir $C_1 = C_2$ og dermed gir den første $C_1 = C_2 = 1$. Altså $\underline{\underline{y(t) = e^{\frac{1}{3}t} + e^{-\frac{1}{3}t}}}$.

b) Hamiltonfunksjonen for den normale løsningen er $H = H(t, y, u, p) = 15 - 9y^2 - u^2 + pu$ hvor $p = p(t)$. Vi har $H'_y = -18y$ og $H'_u = -2u + p$. Pontryaginbetingelsene er da

$$\begin{cases} -2u + p = 0 \\ p' = 18y \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} p = 2u & (4) \\ p' = 18y & (5) \end{cases}$$

Deriverer (4) og får $p' = 2u' = 2y''$ ved (1). Innsatt i (5) gir dette differensiallikningen $y'' = 9y$ som har løsningen $\underline{\underline{y(t) = e^{3t} + e^{-3t}}}$ (røttene og konstantene finnes som i (a)). Vi har også $u(t) = y'(t) = \underline{\underline{3e^{3t} - 3e^{-3t}}}$.

Hvis H er en konkav funksjon i (y, u) så gir $y(t)$ og $u(t)$ maksimum i kontrollproblemet. Vi har

$$\begin{cases} H''_{yy} = -18 = A \\ H''_{yu} = 0 = B \\ H''_{uu} = -2 = C \end{cases} \quad \text{som gir} \quad \begin{cases} AC - B^2 = 36 \geqslant 0 \\ A = -18 < 0 \end{cases} \quad \text{så } H \text{ er konkav.}$$

c) Substituerer $u = y'$ i H og får $F = F(t, y, y') = 15 - 9y^2 - (y')^2$. Vil løse variasjonsproblemet

$$\text{maks} \int_0^1 15 - 9y^2 - (y')^2 \, \mathrm{d}t \quad , \qquad \begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Vi har

$$\begin{cases} F'_y = -18y \\ F'_{y'} = -2y' \end{cases} \quad \text{som gir} \quad \frac{\mathrm{d}(F'_{y'})}{\mathrm{d}\,t} = -2y'' \text{ og Eulerlikningen blir } -18y - (-2y'') = 0$$

Dette gir samme differensiallikning med samme initialbetingsleser som i (b) som dermed har løsningen $\underline{\underline{y(t) = e^{3t} + e^{-3t}}}$.

Hvis F er en konkav funksjon i (y, y') så gir $y(t)$ maksimum i variasjonsproblemet. Vi har

$$\begin{cases} F''_{yy} = -18 \\ F''_{yy'} = 0 \\ F''_{y'y'} = -2 \end{cases} \quad \text{som gir} \quad \begin{cases} AC - B^2 = 36 \geqslant 0 \\ A = -18 < 0 \end{cases} \quad \text{så } F \text{ er konkav.}$$