	Emne	Lærebok
1	Repetisjon	
2	Matriser og matriseregning	[E] 3.1
3	Determinanter og inverse matriser	[E] 3.2 - 3.3

Oppgaver for Forelesning 3	
Oppgaver fra arbeidsboken	[DA] 3.1 - 3.20
Oppgaver fra læreboken	[E] 3.1 - 3.10

① Repetisjon:

Lineære system $(A|\underline{b})$

$\underline{b}=\underline{0}$: homogent
- én løsn. $\underline{x}=\underline{0}$ (entydig)
- uendelig mange løsn.

$\underline{b}\neq\underline{0}$: inhomogent
- ingen løsn.
- én entydig løsn.
- uendelig mange løsn.

Løsningsmetode = Gauss-eliminasjon

Rank (= rang) til en matrise er antall pivoter i en trappeform

Vektorrom

Vektorrommet utspent av $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_r}$: $V = \text{span}(\underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_r})$

$\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_r}\}$ er en basis for V hvis de er lineært uavhengige $\Leftrightarrow$ ingen av vektorene er en lin. komb. av de andre

$\Updownarrow$

$x_1\underline{v_1} + x_2\underline{v_2} + \ldots + x_r\underline{v_r} = \underline{0}$ har kun den trivielle løsn. $\underline{x}=\underline{0}$.

$\dim V$ = dimensjon til V = antall vektorer i en basis

Eivind Eriksen, Kontor B3y-085, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/ELE3719/

Metode: $A = \left(v_1 \,\vdots\, v_2 \,\vdots\, \dots \,\vdots\, v_r \right)$ finner en trappeform fra matrisen A

$\boxed{\dim V = \text{rk } A}$

vektorene som svarer til pivotposisjoner = basis for V

② Matriser og matriseregning

En $m \times n$-matrise: $A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n} \Big\} m$

$a_{ij} \leftarrow$ rad i, kol j

Regneoperasjoner:

* Addisjon/subtraksjon:

$A + B$, $A - B$

* Skalarmultiplikasjon:

$r \cdot A = A \cdot r$

(r tall, A, B matriser av samme størrelse)

Eks:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

* Transponering

$A^T \leftarrow$ bytter om rader og kolonner

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Defn: En matrise A kalles symmetrisk hvis $A^T = A$.

A kalles kvadratisk hvis ant. rader = ant. kol. i A.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ er symmetrisk.

* Matrisemultiplikasjon

$A \cdot B$

Definert hvis A er $m \times n$-matrise og B er $n \times p$-matrise. Resultatet er $m \times p$.

Eks: $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 14 \end{pmatrix}$

$2\times 2 \quad 2\times 1$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ikke defn.

$2\times 1 \quad 2\times 2$

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$

$1 \cdot 0 + 2 \cdot 7 = 14$

$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$

$2\times 2 \quad 2\times 2$

Merk: Matrisemultiplikasjon er ikke-kommutativ $AB \neq BA$

Noen regneregler for matriser

- de fleste regneregler er som før, for eksempel
$$A \cdot (B+C) = A \cdot B + AC$$
- for transponering:
  - $(A^T)^T = A$
  - $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
  - $(rA)^T = r \cdot A^T$
  - $\boxed{(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T}$

Unntak:
$AB \neq BA$
$AB = 0$ betyr ikke at $A=0$ eller $B=0$

Nullmatrisen:

$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Spesielle matriser

Defn En kvadratisk matrise A kalles diagonal hvis alle tall utenfor hoveddiagonalen er null, og øvre triangulær hvis alle tall under hoveddiagonalen er null.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
diagonal

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
øvre triangulær

Identitetsmatrisen I er matrisen som er diagonal med 1'ere på diagonalen.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Viktig egenskap: $\boxed{\begin{matrix} A \cdot I = A \\ I \cdot A = A \end{matrix}}$ for alle matriser A

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Inverse matriser:

A $n \times n$-matrise

Defn: En invers til matrisen A er en matrise B slik at $\left\{ \begin{matrix} A \cdot B = I \\ B \cdot A = I \end{matrix} \right\}$

$A \cdot A^{-1} = I$
$A^{-1} \cdot A = I$

I så fall så skrives den inverse matrisen $A^{-1} = B$.

Tilfelle n=2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$|A| = ad-bc \neq 0$: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$|A| = ad-bc = 0$: A^{-1} fins ikke

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$|A| = ad-bc$
$= 1\cdot 4 - 3\cdot 1 = 1 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sjekk: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow A \cdot A^{-1} = I$

Lineære likningssystem på matriseform

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}}$$

$m \times n$ lineært system

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

koeff. matrisen $m \times n$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$n \times 1$

$$A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \underline{b}$$

Matriseform: $\boxed{A \cdot \underline{x} = \underline{b}}$ ← alle lineære system kan skrives på matriseform

Eks: $x + 3y = 14$
$x + 4y = 72$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ 72 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} \cdot \mid \quad A\underline{x} = \underline{b}$

$A^{-1} \cdot A\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

$I \cdot \underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 - 216 \\ -14 + 72 \end{pmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -160 \\ 58 \end{pmatrix}}}$$

3 Determinanter og inverse matriser

A $n \times n$-matrise

Determinant

A ($n \times n$) $\rightsquigarrow$ $\det(A) = |A|$ determinanten til A, et tall

$$\boxed{\underline{n=2}: \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \quad |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc}$$

Inverser:

A har en invers $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
(A er invertibel)

I så fall er A^{-1} entydig.

$$\boxed{\underline{n=2}: \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad |A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Metode for å finne determinant

(a) Kofaktorutvikling
(langs en rad eller kolonne)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot C_{11} + 1\cdot C_{12} + 1\cdot C_{13} = +1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = +(6)-(5)+(1) = 2$$

C_{ij}: kofaktor i posisjon (i,j)

$$C_{ij} = \underbrace{(-1)^{i+j}}_{\text{fortegn}} \cdot \underbrace{M_{ij}}_{\text{minor}}$$

$$\begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

determinanten til matrisen vi får når vi stryker rad i, kol j.

Fakta: Kofaktorutvikling langs en hvilken som helst rad eller kolonne gir samme svar, determinanten.

Metode for å finne A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad |A| = 2 \neq 0 \Rightarrow A \text{ inverterbar}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} +6 & -5 & +1 \\ -6 & +8 & -2 \\ +2 & -3 & +1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Formel for A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T$$

når $|A| \neq 0$.

b) Alternativ metode for å finne determinant

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} -2 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T$

$$|T| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{3} \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{2} \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \boxed{2} \end{vmatrix} = +1(+1 \cdot 2) = \underline{\underline{2}}$$

Merk: Determinanten til en trappeform (mer generelt, en øvre triangulær matrise), blir determinanten produktet av tallene på diagonalen.

Resultat: Hvis $A \to B$ er en elementær radoperasjon, så har vi;

i) $A \to B$ er å legge til et mult. av en rad til en annen rad: $|B| = |A|$

ii) $A \to B$ er å bytte to rader: $|B| = -|A|$

iii) $A \to B$ er å mult en rad med $c \neq 0$: $|B| = c \cdot |A|$

$$|A| = |T| = \underline{\underline{2}}$$

Potenser:

A $n \times n$-matrise $\qquad A^2 = \underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{A} \qquad A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A \quad$ etc.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}}$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} d_1^N & & & 0 \\ & d_2^N & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n^N \end{pmatrix}$$

formel for diagonale matriser

[DA] 2.7

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & a & -21 & 2 \\ 3 & 7 & a & b \end{array}\right) \begin{matrix} \\ ]1 \\ ]\cdot(-3) \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a+2 & -18 & 3 \\ 0 & 1 & a-9 & b-3 \end{array}\right) \updownarrow$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & a-9 & b-3 \\ 0 & a+2 & -18 & 3 \end{array}\right)]\cdot(-(a+2)) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & a-9 & b-3 \\ 0 & 0 & * & ** \end{array}\right)$$

$$* = -18 - (a-9)\cdot(a+2) = \cancel{-18} - (a^2 - 7a \cancel{-18}) = \underline{7a - a^2}$$

$$** = \underline{3 - (a+2)(b-3)}$$

$a=0$: $3 - 2(b-3) = 9 - 2b$
$a=7$: $3 - 9(b-3) = 30 - 9b$

$* = 7a - a^2$
$= a\cdot(7-a) = 0$
når $\underline{a=0, a=7}$

$\underline{* \neq 0}$: én løsn. for $a \neq 0, 7$

$\underline{* = 0}$: $** = 0$: en frihetsgrad (z fri) $\underline{a=0}$, $\underline{b = 9/2}$
eller
$\underline{a=7}$, $b = 30/9 = \underline{10/3}$

$** \neq 0$: ingen løsn. alle andre tilfeller

Konkl:

ingen løsn: $\begin{cases} a=0,\ b \neq 9/2 \\ \text{eller} \\ a=7,\ b \neq 10/3 \end{cases}$

én løsn: $a \neq 0, 7$

uendelig mange løsn.: $\begin{cases} a=0,\ b=9/2 \\ \text{eller} \\ a=7,\ b=10/3 \end{cases}$