	Emne	Lærebok
1	Repetisjon	
2	Lineær uavhengighet og basis	[E] 2.6 - 2.7 (til Column space ...)
3	Vektorlikninger og lineære systemer	[E] 1.1 - 1.5
4	Rang og homogene systemer	[E] 1.6

	Oppgaver for Forelesning 2	
	Oppgaver fra arbeidsboken	[DA] 2.1 - 2.14
	Oppgaver fra læreboken	[E] 1.1 - 1.8, 2.11, 2.13

Repetisjon:

Eks: $\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{v_1} - \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2\underline{v_1} + 3\underline{v_2} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$c_1\underline{v_1} + c_2\underline{v_2}$: linear kombinasjon av $\underline{v_1}$ og $\underline{v_2}$ når c_1, c_2 er tall

$\text{span}(\underline{v_1}, \underline{v_2})$ = mengden av alle lin. komb. av $\underline{v_1}$ og $\underline{v_2}$.

$\underline{v_1}, \underline{v_2}$: 3-vektorer

$\Rightarrow$ $c_1\underline{v_1} + c_2\underline{v_2}$ 3-vektor

$\mathbb{R}^3$ = mengden av alle 3-vektorer

$\boxed{\text{span}(\underline{v_1}, \underline{v_2}) \text{ delmengde av } \mathbb{R}^3}$

Indre produkt = prikkprodukt

$$\underline{v_1} \cdot \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot 4 + 2\cdot 2 + 1\cdot 0 = 8$$

Viktig egenskap:
$\underline{v}$ og $\underline{w}$ er ortogonale hvis $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$, $\underline{v} \perp \underline{w}$

2 Lineær uavhengighet og basis

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r$ vektorer i $\mathbb{R}^n$

Defn. $V = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r)$ kalles vektorrommet utspent av $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r$.

Defn. Vektorene $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r$ er lineært avhengige hvis minst én av vektorene er en lineær kombinasjon av de andre, og lineært uavhengige ellers.

Eks:

Anta at $r = 3$ og at $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{v}_3$.

Da har vi:

$$\left.\begin{aligned} \underline{v}_3 &= \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ \underline{v}_2 &= \underline{v}_1 - \underline{v}_3 \\ \underline{v}_1 &= \underline{v}_2 + \underline{v}_3 \end{aligned}\right\} \text{ lineært avhengige vektorer}$$

Det betyr:

$$V = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) \leftarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \text{ ikke en basis}$$
$$= \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$$

$$c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + c_3\underline{v}_3$$
$$= c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + c_3(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$
$$= (c_1 + c_3)\underline{v}_1 + (c_2 - c_3)\underline{v}_2$$

$$\underline{v}_1 - \underline{v}_2 - \underline{v}_3 = \underline{0}$$

Løsn. $(1, -1, -1) \neq (0, 0, 0)$

Defn. La $V = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r)$. Da kalles $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r\}$ en basis for V hvis disse vektorene er lineært uavhengige.

Resultat:

Vektorene $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r$ er lineært avhengige hvis og bare hvis vektorlikningen

$$x_1 \cdot \underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \ldots + x_r \cdot \underline{v}_r = \underline{0}$$

har ikke-trivielle løsninger $\underline{x} \neq \underline{0}$

(dvs $(x_1, x_2, \ldots, x_r) \neq (0, 0, \ldots, 0)$).

Eks:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad V = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4)$$

Metode: $x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + x_3 \underline{v}_3 + x_4 \underline{v}_4 = \underline{0}$

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

vektorlikning

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \quad\quad &= 0 \end{aligned}$$

lineært system

Kun løsningen $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

lineært uavhengige

det fins ikke-trivielle løsn. $(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq (0,0,0,0)$

lineært avhengige

③ Lineære system og Gauss-eliminasjon

Eks:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \quad\quad &= 0 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3×4 lineært system på standard form

utvidet matrise til det lineære systemet

Elementære radoperasjoner:

i) Legge til et multippel av en rad til en annen rad

ii) Bytte om to rader

iii) Multiplisere en rad med $c \neq 0$.

Trappeform

En pivot er det første tallet i en rad som er ulik null

En matrise er på trappeform hvis i) alle nullrader står nederst i matrisen

ii) hver pivot kommer lenger til høyre enn pivoter i radene ovenfor

Husk: Vi skal få null under hver pivot ved å bruke denne pivoten.

Fakta: Vi kan alltid finne en trappeform. Den er ikke entydig.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \; -2$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \; -1$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \; -7$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

trappeform

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_2 - x_4 &= 0 \\ -x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Baklengs substitusjon

Starter nedenfra, løser for variabelen som svarer til pivot, og substituerer der vi kan.

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & \underline{x_1} + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\
(2)\quad & \underline{-x_2} - x_4 = 0 \\
(3)\quad & \underline{-x_3} + 4x_4 = 0
\end{aligned}
$$

(3) $-x_3 + 4x_4 = 0$

$$\frac{-x_3}{-1} = \frac{-4x_4}{-1}$$

$$x_3 = 4x_4$$

(2) $-x_2 - x_4 = 0$

$$\frac{-x_2}{-1} = \frac{x_4}{-1}$$

$$x_2 = -x_4$$

(1) $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -3x_2 - x_3 - x_4 \\
&= -3(-x_4) - (4x_4) - x_4 \\
&= 3x_4 - 4x_4 - x_4 \\
x_1 &= -2x_4
\end{aligned}
$$

Konklusjon:

x_1, x_2, x_3 er avhengige variabler og x_4 er fri variabel

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -2x_4 \\
x_2 &= -x_4 \\
x_3 &= 4x_4 \\
x_4 &\text{ er fri}
\end{aligned}
\qquad
\boxed{\begin{aligned}
x_1 &= -2t \\
x_2 &= -t \\
x_3 &= 4t \\
x_4 &= t
\end{aligned}}
$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ -t \\ 4t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- uendelig mange løsninger (én frihetsgrad), dvs mange ikke trivielle løsninger
- $t=1$ gir ikke-triviell løsning $(-2,-1,4,1)$, dvs

$$-2\underline{v}_1 - \underline{v}_2 + 4\underline{v}_3 + \underline{v}_4 = \underline{0} \implies \boxed{\underline{v}_4 = 2\underline{v}_1 + \underline{v}_2 - 4\underline{v}_3}$$

Altså: i) $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ er lineært avhengige

med $\underline{v}_4 = 2\underline{v}_1 + \underline{v}_2 - 4\underline{v}_3$

ii) $V = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4) = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$

iii) $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ er lineært uavhengige og danner en basis for V

$$x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + x_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$$

← samme likning som før når har tatt bort $\underline{v}_4$

Tilbake til Gauss-eliminasjon

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nr}x_r &= 0 \end{aligned}$$

Defn. Hvis alle konstantledd i det lineære system er 0, kalles det lineære systemet homogent.

Resultat:

En posisjon som har pivot i trappeformen kalles en pivotposisjon. En variabel kalles fri dersom det ikke er pivotposisjon i den tilsvarende kolonnen, og avhengig hvis det er en pivotposisjon i den tilsvarende kolonnen.

- ingen frie variabler: $\underline{x} = \underline{0}$ er eneste løsning
- minst én fri variabel: uendelig mange løsninger

4 Rang og homogene systemer

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r$: $V = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r)$
n-vektorer

Metode: Hvordan finne en basis for V

$A = \left(\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \underline{v}_3 \mid \ldots \mid \underline{v}_r \right)$

Vi kan finne en trappeform for A. Resultat: Vektorene som svarer til pivotposisjoner danner en basis for V. Alle andre vektorer kan skrives som en lineærkombinasjon av basisvektorene.

Vi ser på vektorlikn.

$x_1 \cdot \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + \ldots + x_r \underline{v}_r = \underline{0}$

Dette blir et lineært system med utvidet matrise

$$\left(\underline{v}_1 \; \underline{v}_2 \; \ldots \; \underline{v}_r \,\middle|\, \underline{0} \right)$$

Eks: $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \underset{\substack{\text{se} \\ \text{s. 4}}}{\ldots} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ basis for $V = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4)$
$\underline{v}_4$ er lineærkomb. av basisvektorene $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$

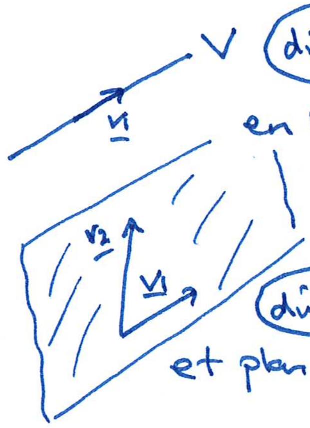
dim $V = 3$
rk $A = 3$

Defn. Dimensjonen til et vektorrom er antall vektorer i en basis. dim V

Defn. Rangen til en matrise er antall pivotposisjoner i matrisen. rk A

Resultat: Hvis $V = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_r)$ og $A = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \dots | \underline{v}_r)$ så er $\boxed{\dim V = \text{rk}\, A}$

Geometrisk tolkning:



dim 1 en linje

dim 2 et plan

dim ≥3 hyperplan (vanskelig å tegne!)

Eks:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4) = \text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$$

$$\dim V = \underline{3}$$

Lineære system som ikke er homogene:

Eks:
$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ x-y+z &= 1 \\ x+2y+4z &= 7 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1 \\ -1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 1/2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

trappeform

$$\begin{aligned} \underline{x}+y+z &= 3 \\ \underline{-2y} &= -2 \\ \underline{3z} &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \underline{x=1} \\ \underline{y=1} \\ \underline{z=1} \end{aligned}$$

ingen frie variabler

Løsning: $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

Én løsn.

Resultat:

Et lineært system har enten

i) ingen løsninger

ii) Én entydig løsn.

iii) uendelig mange løsninger