	Emne	Kompendium
1	Repetisjon og oppgaveregning	
2	Andre ordens lineære differensiallikninger	[E] 7.9 - 7.10
3	Mer om superposisjonsprinsippet	[E] 7.6

	Oppgaver for Forelesning 13	
	Oppgaver fra arbeidsboken	[DA] 13.1 - 13.12
	Oppgaver fra kompendiet	[E] 7.26 - 7.29, 7.30a, 7.32
		7.18 - 7.19

Oppsummeringsforelesn. 7. mai ← Spesifiser rom / tid
Eksamen 15. mai

1 **Repetisjon**: Første ordens lineære diff. likninger

$$\boxed{y' + a(t)\cdot y = b(t)}$$

Løsningsmetoder:

i) Separabel
hvis $b(t) - a(t)\cdot y = f(t)\cdot g(y)$

ii) Superposisjon $y = y_h + y_p$
hvis $a(t) = a$ er konst. (og $b(t) = b$ er konst)

iii) integrerende faktor
$u(t) = e^{\int a(t)dt}$
$y' + a(t)y = b(t) \quad | \cdot u(t)$
$(y\cdot u)' = b(t)\cdot u(t)$

Eks: $y' - 2y = 6$

$y = y_h + y_p = \underline{\underline{C\cdot e^{2t} - 3}}$

y_h: $y' - 2y = 0$
$r - 2 = 0 \quad \underline{r = 2} \quad y_h = C\cdot e^{2t}$

y_p: $y = A$ (konst. løsn.)
$y' = 0$
$0 - 2A = 6$
$A = -3 \quad y_p = \underline{-3}$

Oppgaver:

[DA] 12.3 c) $y' + 2y = t^2 \quad , y(0) = 1$

linear $a(t) = 2 \quad b(t) = t^2 \rightarrow$ Int. faktor

$$\int a(t)\,dt = \int 2\,dt = 2t + C \Rightarrow u = e^{2t} \quad (C = 0)$$

$$y' + 2y = t^2 \quad | \cdot e^{2t}$$

$$y' \cdot e^{2t} + y e^{2t} \cdot 2 = (y \cdot e^{2t})' = t^2 e^{2t}$$

$$y \cdot e^{2t} = \int t^2 e^{2t}\,dt = \frac{1}{2} e^{2t} \cdot t^2 - \int \frac{1}{\cancel{2}} e^{2t} \cdot \cancel{2}t\,dt$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \frac{1}{2}e^{2t} & v = t^2 \\ u' = e^{2t} & v' = 2t \end{array}}$$

$$= \frac{1}{2} t^2 e^{2t} - \int t e^{2t}\,dt = \frac{1}{2} t^2 e^{2t} - \left(\frac{1}{2} e^{2t} \cdot t - \int \frac{1}{2} e^{2t}\,dt \right.$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \frac{1}{2}e^{2t} & v = t \\ u' = e^{2t} & v' = 1 \end{array}}$$

$$\frac{y e^{2t}}{e^{2t}} = \frac{\frac{1}{2} t^2 e^{2t} - \frac{1}{2} t e^{2t} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} e^{2t}\right) + C}{e^{2t}}$$

$$y = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + C \cdot e^{-2t}$$

$y(0) = 1$: $\quad 1 = \frac{1}{4} + C \cdot 1 \quad C = 3/4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^{-2t}$

[DA] 12.4 c) $\underbrace{y' - \frac{t}{t^2+1} y = t}$ $(t>1)$

lin. $a(t) = -\frac{t}{t^2+1}$

$b(t) = t$

Int. faktor.

$$\int a(t)\,dt = \int -\frac{t}{t^2+1}\,dt =$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= t^2+1 \\ du &= 2t\,dt \end{aligned}} \quad dt = \frac{du}{2t}$$

$$= -\int \frac{\cancel{t}}{u} \frac{du}{2\cancel{t}} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C \quad \downarrow C=0$$

$$u = e^{-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)}$$

$(x^a)^b = x^{ab}$

$$= \left(e^{\ln(t^2+1)}\right)^{-1/2} = \underline{(t^2+1)^{-1/2}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$y' - \frac{t}{t^2+1} y = t \quad |\cdot u$$

$$\left(y \cdot (t^2+1)^{-1/2}\right)' = t\,(t^2+1)^{-1/2}$$

$$y \cdot (t^2+1)^{-1/2} = \int t \cdot (t^2+1)^{-1/2}\,dt = \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$

$$\boxed{\begin{aligned} v &= t^2+1 \\ dv &= 2t\,dt \end{aligned}} \quad dt = \frac{dv}{2t}$$

$$= \int \cancel{t}\, v^{-1/2} \cdot \frac{dv}{2\cancel{t}}$$

$$= \frac{1}{2}\int v^{-1/2}\,dv = \frac{1}{2}\left(\frac{v^{1/2}}{1/2}\right) + C$$

$$\frac{y}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{\sqrt{v}}{1} + C = \sqrt{t^2+1} + C \quad | \cdot \sqrt{t^2+1}$$

$$y = \underline{\underline{t^2+1 + C\cdot\sqrt{t^2+1}}}$$

t^2+1 skal være t^2-1 overalt

$$y = t^2-1 + C\cdot\sqrt{t^2-1}$$

② Andre ordens lineære differensiallikninger

Eks: $y'' = 6t - 12$

$$y' = \int 6t-12 \, dt = 3t^2 - 12t + C$$

$$y = \int 3t^2 - 12t + C \, dt = \underline{\underline{t^3 - 6t^2 + Ct + D}}$$

løsbar ved enkel integrasjon (to ganger)

Andre ordens differensiallikning:

Diff. likning som inneholder y'' men ikke høyere ordens deriverte: $y'' = F(t, y, y')$

Den generelle løsn. avhenger av $\underline{\underline{\text{to}}}$ ubestemte parametre. Trenger $\underline{\underline{\text{to}}}$ initialbetingelser.

<u>Defn</u>. En annen ordens diff.likn. er <u>lineær</u> hvis den kan skrives

$$\boxed{y'' + a(t)\cdot y' + b(t)\cdot y = h(t)}$$

Den kalles <u>homogen</u> hvis $h(t)=0$, og in<u>homogen</u> ellers.

Den har <u>konstante koeff.</u> hvis $a(t)=a$ og $b(t)=b$ er konstanter ← Vi antar dette.

<u>Det homogene tilfellet:</u> $y'' + ay' + by = 0$

<u>Eks:</u> $y'' - 7y' + 12y = 0$

<u>Karakteristisk likning:</u>

$r^2 - 7r + 12 = 0$

$\underline{r=3}$, $\underline{r=4}$ $\rightsquigarrow$ $y = \underline{\underline{C_1 \cdot e^{3t} + C_2 \cdot e^{4t}}}$

er den generelle løsn.

<u>Forklaring:</u>

Første orden: $y' + ay = 0$

$r + a = 0$

$r = -a$

$y = C\cdot e^{-at}$

$y' = -ay$ $\quad \frac{1}{y} y' = -a$

<u>Andre orden</u>: $y'' + ay' + by = 0$

Antar $y = e^{rt}$ er løsn. $\Rightarrow$ $(r^2 e^{rt}) + a(re^{rt}) + b(e^{rt}) = 0$

$y' = e^{rt}\cdot r$

$y'' = re^{rt}\cdot r$

$e^{rt}(r^2 + ar + b) = 0$

Kar. likn. $\longrightarrow$ $\boxed{r^2 + ar + b = 0}$

Det generelle tilfellet: $y'' + ay' + by = h(t)$

Eks: $y'' - 7y' + 12y = 4$

y_h: $y'' - 7y' + 12y = 0$

$r^2 - 7r + 12 = 0$

$r = 3, \; r = 4$

$y_h = C_1 e^{3t} + C_2 e^{4t}$

y_p: $y'' - 7y' + 12y = 4$

Konst.

Spekker om det fins konst. løsninger

$y = A, \quad y' = 0, \quad y'' = 0$

$0 - 7(0) + 12(A) = 4$

$\frac{12A}{12} = \frac{4}{12}$

$A = \frac{4}{12} = 1/3$

$y_p = 1/3$

Generell løsn:

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{3t} + C_2 e^{4t} + 1/3$$

$y'' - 7y' + 12y = 4$:

$D(y) = y'' - 7y' + 12y$

$D(C_1 e^{3t} + C_2 e^{4t}) = 0$

$D(1/3) = 4$

$D(C_1 e^{3t} + C_2 e^{4t} + 1/3) = 0 + 4 = 4$

Superposisjon:

$y = y_h + y_p$ der

y_h: den generelle løsn. av den homogene

$y'' + ay' + by = 0$

y_p: én løsn. av

$y'' + ay' + by = h(t)$

Trenger: $D(y_1 \pm y_2) = D(y_1) \pm D(y_2)$

Merk: Hvis $D(y) = 4$,

så: $D(y - y_p) = D(y) - D(y_p) = 4 - 4 = 0$

$\Rightarrow y - y_p$ er homogen løsn.

$\Rightarrow y - y_p = C_1 e^{3t} + C_2 e^{4t}$

$\Rightarrow y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{4t} + 1/3$

Eks:

(i) $y'' - 4y' + 5y = 0$

(ii) $y'' - 4y' + 3y = 0$

(iii) $y'' - 4y' + 4y = 0$

i) Kar. likn: $r^2 - 4r + 5 = 0$

$r = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2}$

$r^2 - 4r + 4 = -5 + 4$

$(r-2)^2 = -1$

$= 2 \pm \frac{\sqrt{-4}}{2} = 2 \pm \frac{\cancel{\sqrt{4}} \cdot \sqrt{-1}}{\cancel{2}}$

$= 2 \pm \sqrt{-1}$

ingen reelle løsn. $\Rightarrow$ det fins løsn. v.hj.a. komplekse tall (sin/cos)

ii) Kar. likn: $r^2 - 4r + 3 = 0$

$r^2 - 4r + 4 = -3 + 4$

$(r-2)^2 = 1$ $\quad r - 2 = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$r = 2 \pm 1 = \underline{1}, \underline{3}$

$y = \underline{\underline{C_1 e^t + C_2 e^{3t}}}$

iii) Kar. likn: $r^2 - 4r + 4 = 0$

$(r-2)^2 = 0$

$(r-2)(r-2) = 0$

$r = 2$ eller $r = 2$

dobbeltrot $r_1 = r_2 = \underline{2}$

$y = \cancel{C_1 e^{2t} + C_2 e^{2t}}$

$= \cancel{C \cdot e^{2t}}$ $\quad (C = C_1 + C_2)$

$= C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot t e^{2t}$

$= \underline{(C_1 + C_2 t) e^{2t}}$

Fakta: Hvis r er en dobbeltrot, så er $y = e^{rt}$ og $y = t \cdot e^{rt}$ løsn. av den homogene likn.

Forklaring: Anta at $y'' + ay' + by = 0$ har karakteristisk likn. med en dobbelrot $r = c = \underline{-a/2}$

$$r^2 + ar + b = 0$$
$$\| $$
$$(r-c)^2 = r^2 - 2cr + c^2 \Rightarrow \quad a = -2c, \quad b = c^2 \Rightarrow b = a^2/4$$

Sjekk: $y = \underline{te^{rt}}$

$$y' = 1 \cdot e^{rt} + t \cdot e^{rt} \cdot r = \underline{e^{rt} + rte^{rt}}$$

$$y'' = \underline{e^{rt}} \cdot r + \underline{r\, e^{rt}} + rt \cdot e^{rt} \cdot r$$
$$= \underline{2r \cdot e^{rt} + r^2 t e^{rt}}$$

$$y'' + ay' + by = \left(2re^{rt} + r^2 t e^{rt}\right) + a\left(e^{rt} + rte^{rt}\right) + b\left(te^{rt}\right)$$

$$= t \cdot e^{rt} \underbrace{\left(r^2 + ar + b\right)}_{=0} + e^{rt} \left(2r + a\right) = 0$$

$$2(-a/2) + a = -a + a = 0$$

Eks: $y'' + 6y' \div 7y = t + 12$

$$y = y_h + y_p = \underline{\underline{C_1 e^{-7t} + C_2 e^{t} + \left(-\tfrac{1}{7}t - \tfrac{90}{49}\right)}}$$

y_h: $y'' + 6y' - 7y = 0$

$$r^2 + 6r - 7 = 0$$

$$r^2 + 6r + 9 = 7 + 9$$

$$(r+3)^2 = 16$$

$$\to r + 3 = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

$$r = -3 \pm 4$$

$$r = \underline{-7} \text{ eller } r = \overline{1}$$

$$y_h = \underline{C_1 \cdot e^{-7t} + C_2 e^{t}}$$

y_p: $y'' + 6y' - 7y = t + 12$

$$y = At + B$$

$$y' = A$$

$$y'' = 0$$

$$0 + 6A - 7(At + B) = t + 12$$

$$(-7A)t + (6A - 7B) = t + 12$$

$$-7A = 1 \qquad 6A - 7B = 12$$

$$A = \underline{-1/7} \qquad -\frac{6}{7} - 7B = 12$$

$$-7B = 12 + \frac{6}{7}$$

$$= \frac{90}{7}$$

$$B = -\frac{90}{49}$$

$$y_p = \underline{-\frac{1}{7}t - \frac{90}{49}}$$