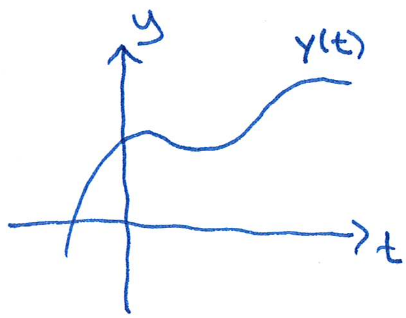
| | Emne | Kompendium |
|---|---|---|
| 1 | Repetisjon og oppgaveregning | |
| 2 | Første ordens lineære differensiallikninger | [E] 7.5 |
| 3 | Superposisjonsprinsippet | [E] 7.6 |

| | Oppgaver for Forelesning 12 | |
|---|---|---|
| | Oppgaver fra arbeidsboken | [DA] 12.1 - 12.6 |
| | Oppgaver fra kompendiet | [E] 7.15 - 7.16, 7.17bc, 7.18 - 7.19 |

## 1 Repetisjon

En differensiallikning er en likning der en funksjon $y = y(t)$ er den ukjente, og likningen inneholder $y'$ og/eller høyere ordens deriverte




Orden: høyeste ordens deriverte i diff.likningen

Eks: $y' = 4ty$

Generelt for første ordens diff.likn.: $\boxed{y' = F(t,y)}$

Første ordens diff.likn. har generell løsn. som avhenger av én ubestemt parameter.

Separable diff.likninger:

separabel: diff.likningen kan skrives $y' = f(t) \cdot g(y)$

løsn.metode: $y' = f(t) \cdot g(y) \quad | : g(y)$

$\frac{1}{g(y)} y' = f(t) \quad | \int \dots dt$

$\int \frac{1}{g(y)} \underbrace{y' dt} = \int f(t)\, dt$

$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t)\, dt$

Eivind Eriksen, Kontor B3y-085, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/ELE3719/ Handelshøyskolen BI

Oppgave [E] 7.13

d) $ty' + y^2 = 1$  $y' = F(t,y)$

$\frac{ty'}{t} = \frac{1-y^2}{t}$  $= f(t)\cdot g(y)$ ?

$y' = \frac{1-y^2}{t} = \underbrace{\frac{1}{t}}_{f(t)} \cdot \underbrace{(1-y^2)}_{g(y)} \quad | : (1-y^2)$  ← separabel

$\frac{1}{1-y^2}y' = \frac{1}{t}$  $\int \frac{1}{1-y^2}\underbrace{y'\,dt}_{dy} = \int \frac{1}{t}\,dt$  $\boxed{dy = y'\,dt}$

Delbrøksoppspalting:

$1-y^2 = (1+y)(1-y)$

$\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{(1+y)(1-y)} = \frac{A^{=1/2}}{1+y} + \frac{B^{=1/2}}{1-y}$

$\cdot(1+y)\cdot(1-y) \,|\quad 1 = A(1-y) + B(1+y)$

$y=1$: $1 = \cancel{A\cdot 0} + B\cdot 2$

$y=-1$: $1 = A\cdot 2 + \cancel{B\cdot 0}$

$B = 1/2$  $A = 1/2$

$\int \frac{1}{1-y^2}dy = \int \frac{1/2}{1+y} + \frac{1/2}{1-y}\,dy$

$= 1/2 \cdot \int \frac{1}{1+y}dy + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-y}dy$

$= 1/2 \cdot \ln|1+y| + \frac{1}{2}\ln|1-y| \cdot \frac{1}{(-1)} + C$

$du = u'\,dt$

$\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \int \frac{1}{t}\,dt$

$= \ln|t| + C$

$\frac{1}{2}\ln|1+y| - \frac{1}{2}\ln|1-y| = \ln|t| + C \quad |\cdot 2$

$\ln|1+y| - \ln|1-y| = 2\ln|t| + 2C \quad | e$

$e^{\ln|1+y| - \ln|1-y|} = e^{2\ln|t| + 2C}$

$\frac{e^{\ln|1+y|}}{e^{\ln|1-y|}} = e^{2\ln|t|}\cdot e^{2C}$

$\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = e^{2C}\cdot\left(e^{\ln|t|}\right)^2$

$= e^{2C}\cdot|t|^2 = e^{2C}\cdot t^2$

$\frac{1+y}{1-y} = \pm e^{2C}\cdot t^2 = Kt^2 \quad |\cdot(1-y)$

$$1+y = kt^2 \cdot (1-y) = kt^2 - y \cdot kt^2$$

$$y + y \cdot kt^2 = kt^2 - 1$$

$$\frac{y \cdot (1+kt^2)}{1+kt^2} = \frac{kt^2-1}{1+kt^2} \Rightarrow y = \frac{kt^2-1}{kt^2+1}$$

generell løsn. på eksplisitt form

e) $y' - \ln t = 1$

$$y' = 1 + \ln t = \underbrace{(1+\ln t)}_{f(t)} \cdot \underbrace{1}_{g(y)} \leftarrow \text{separabel}$$

$$\frac{1}{1} y' = 1 + \ln t \quad \Big| \int \ldots dt$$

$$\boxed{\int u'v\,dt = uv - \int uv'\,dt \quad \text{delvis integrasjon}}$$

$$\int 1 \cdot y'\,dt = \int 1 + \ln t\,dt$$

$$\int 1\,dy = \int 1 + \ln t\,dt$$

$$y = t + \int \underbrace{\ln t}_{v} \cdot \underbrace{1}_{u'}\,dt$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = t & v = \ln t \\ u' = 1 & v' = 1/t \end{array}}$$

$$= t + t \cdot \ln t - \int t \cdot 1/t\,dt$$

$$= t + t\ln t - \int 1\,dt$$

$$y = \cancel{t} + t\ln t - \cancel{t} + C$$

$$y = t\ln t + C$$

## (2) Første ordens lineære diff. likninger

**Defn** En første ordens diff.likning er lineær hvis den kan skrives som ← $y' = F(t,y)$

$$\boxed{y' + a(t)\cdot y = b(t)} \iff y' = b(t) - a(t)y$$

Den kalles homogen hvis $b(t)=0$, og inhomogen ellers.

**Det homogene tilfellet**: $y' + a(t)\cdot y = 0 \iff y' = -a(t)\cdot y$

$\Rightarrow$ Homogen lineære diff. likn. er separable

**Eks** $y' - 2y = 0 \leftarrow a(t) = -2$ er konst.

$y' = 2\cdot y \quad | : y$

$\frac{1}{y} y' = 2 \quad | \int .. dt$

$\int \frac{1}{y}\, dy = \int 2\, dt$

$\ln|y| = 2t + C \quad | e^{\cdot}$

$|y| = e^{2t+C} = e^{2t}\cdot e^{C}$

$y = (\pm e^{C})\cdot e^{2t} = K\cdot e^{2t}$

$y' + ay = 0 \leftarrow a(t) = a$ er konst.

$y' = -ay \quad | : y$

$\frac{1}{y} y' = -a$

$\int \frac{1}{y}\, dy = \int -a\, dt$

$\ln|y| = -at + C \quad | e^{\cdot}$

$|y| = e^{-at+C} = e^{-at}\cdot e^{C}$

$y = (\pm e^{C})\cdot e^{-at} = Ke^{-at}$

**Eks:**

$$y' - 2ty = 0 \qquad a(t) = -2t$$

$$y' = 2ty \quad | : y$$

$$\frac{1}{y} y' = 2t$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 2t\,dt$$

$$\ln|y| = t^2 + C \quad | e^{\cdot}$$

$$|y| = e^{t^2+C} = e^{t^2} \cdot e^C$$

$$y = \pm e^C e^{t^2} = \underline{\underline{K e^{t^2}}}$$

**Generelt:**

$$y' + a(t) y = 0$$

$$y' = -a(t) y$$

$$\frac{1}{y} y' = -a(t)$$

$$\ln|y| = \int -a(t)\,dt$$

$$|y| = e^{-\int a(t) dt}$$

$$\underline{y = \pm e^{-\int a(t) dt}}$$

**Det inhomogene tilfellet:** $y' + a(t) y = b(t)$

**Eks:** $y' - 2y = 6$

**Alt I:** $y' = 6 + 2y = \underbrace{2}_{f(t)} \cdot \underbrace{(3+y)}_{g(y)}$

Separabel

**Alt 2:** Superposisjonsprinsippet

$$y = y_h + y_p = \underline{\underline{K \cdot e^{2t} - 3}}$$

Superposisjon kan brukes på alle lineære diff. likn.

$y_h$: den generelle løsn. av den homogene likn. (sett inn 0 på H.S.)

$y_p$: en partikulær løsn. (spesiell løsn.) av opprinnelig diff. likn.

**Homogen:** $y' - 2y = 0$

$y_h = \underline{K \cdot e^{2t}}$ (se forrige side)

**Partikulær:** $y' - 2y = 6 \qquad y_p = \underline{-3}$

## 3) Mer om superposisjonsprinsippet

$y_h$: Hvis $a(t) = a$ så får vi: $y' + ay = 0$

Da kan vi bruke karakteristisk likn:

$$y' + ay = 0 \rightsquigarrow r + a = 0$$

$y' \rightsquigarrow r$

$y \rightsquigarrow 1$

$r = -a$ løsn. av kar. likn.

$$\Downarrow$$

$$y_h = C \cdot e^{rt} = C \cdot e^{-at}$$

Eks: $y' - 2y = 0$

$$r - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow y_h = C \cdot e^{2t}$$

$y_p$: $y' + a(t) \cdot y = b(t)$

Generelt: se på $b(t)$, forsøk med $y$ = funksjon av "samme type"

Eks: $y' - 2y = 6$

$b(t) = 6$ (en konst.)

$\Rightarrow$ Prøv: $y = A$ (en konst).

$y' = 0$

$$\Downarrow$$

$$0 - 2A = 6$$

$$\frac{-2A}{-2} = \frac{6}{-2} \qquad A = -3$$

**Ek:** $y' + 3y = t+1$

$$y = y_h + y_p = \underline{\underline{C\cdot e^{-3t} + \frac{1}{3}t + \frac{2}{9}}}$$

$\underline{y_h}$: $y' + 3y = 0$

$r + 3 = 0 \quad r = \underline{-3} \quad y_h = \underline{C\cdot e^{-3t}}$

$\underline{y_p}$: $y' + 3y = \underline{t+1}$ $\quad b(t)$ lineær $\Rightarrow$ $\underline{y \text{ lin.}}$

$$\begin{cases} y = \underline{At+B} \\ y' = A \end{cases}$$

$A + 3(At+B) = t+1$

$3A = 1$
$A + 3B = 1$

$\underline{3At} + (A+3B) = \underline{t}+1$

$t=0$: $A + 3B = 1$

$t=1$: $3A + A + 3B = 2$

$$\begin{aligned} A + 3B &= 1 \\ 4A + 3B &= 2 \\ \hline -3A/_{-3} &= -1/_{-3} \end{aligned} \qquad \underline{A = 1/3}$$

$1/3 + 3B = 1$
$3B = 2/3$
$\underline{B = 2/9}$

$$y_p = \underline{\frac{1}{3}t + \frac{2}{9}}$$

__Løsningsmetoder:__ $y' + a(t)\cdot y = b(t)$

i) __Løsning som separabel diff.likn.__ $\quad y' = b(t) - a(t)\cdot y$
(hvis det er mulig)

ii) __Superposisjonsprinsippet__. $\quad y = y_h + y_p$
(nyttig hvis $a(t) = a$ er konst. og $b(t)$ konstant / ikke for kompl. fn.)

iii) __Integrerende faktor__ (spesielt hvis $a(t)$ ikke konst.)

Eks: $y' + \underline{2t}y = 4t \quad | \cdot u$ $\qquad a(t) = +2t$ ikke konst.

$$\underbrace{uy' + 2tu \cdot y}_{} = 4t \cdot u$$

Integrerende faktor:

$u = u(t)$

med $u' = 2tu$

$uy' + u'y$

$$= (uy)' = 4tu \quad | \int .. \, dt$$

$$\int (uy)' \, dt = \int 4t \cdot u(t) \, dt$$

$$uy = \int 4t \cdot u(t) \, dt$$

$$y = \frac{1}{u(t)} \int 4t \, u(t) \, dt$$

$\frac{1}{u} u' = 2t \quad | \int .. \, dt$

$\int \frac{1}{u} \, du = \int 2t \, dt$

$\ln |u| = t^2 + C$

$|u| = e^{t^2 + C} = e^{t^2} \cdot e^C$

$u = (\pm e^C) e^{t^2} = K \cdot e^{t^2}$

$K = 1$: $\boxed{u = e^{t^2}}$

$$y = \frac{1}{e^{t^2}} \cdot \int 4t \cdot e^{t^2} \, dt$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= t^2 \\ du &= 2t \cdot dt \end{aligned}}$$

Generell formel for integrerende faktor:

$$u = e^{\int a(t) \, dt}$$

$$= \frac{1}{e^{t^2}} \int \cancel{4t} \cdot e^u \cdot \frac{du}{\cancel{2t}}$$

$$= \frac{1}{e^{t^2}} \int 2e^u \, du = \frac{1}{e^{t^2}} \left( 2e^u + C \right)$$

$$y = \frac{1}{e^{t^2}} \left( 2e^{t^2} + C \right) = \underline{\underline{2 + C \cdot e^{-t^2}}} = \underline{\underline{2 + \frac{C}{e^{t^2}}}}$$

Eivind Eriksen, Kontor B3y-085, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/ELE3719/

Alt: $y' + 2ty = 4t$

Separabel

$$y' = 4t - 2ty = 2t(2-y)$$

$$\frac{1}{2-y} y' = 2t$$

$$\int \frac{1}{2-y}\,dy = \int 2t\,dt$$

$$-\ln|2-y| = t^2 + C$$

$$\ln|2-y| = -t^2 - C$$

$$|2-y| = e^{-t^2-C} = e^{-t^2} \cdot e^{-C}$$

$$2-y = \pm e^{-C} \cdot e^{-t^2} = K \cdot e^{-t^2}$$

$$\frac{-y}{-1} = \frac{Ke^{-t^2} - 2}{-1}$$

$$y = \underline{\underline{2 - Ke^{-t^2}}}$$

Forrige side: Int. faktor

$$y = 2 + C \cdot e^{-t^2}$$

Eks: $(t^2+1)y' + 2t\,y = 1 \quad | : (t^2+1)$

$$\boxed{y' + \frac{2t}{t^2+1} y = \frac{1}{t^2+1}}$$

$a(t) = \frac{2t}{t^2+1}$ $\quad b(t) = \frac{1}{t^2+1}$

lineær.

Sep: ? Nei.

$$y' = \frac{1}{t^2+1} - \frac{2t}{t^2+1} \cdot y = \frac{1-2ty}{t^2+1} = \frac{1}{t^2+1} \cdot (1-2ty)$$

Bruker integrerende faktor: $u = e^{\int a(t)\,dt}$

$$\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \int \frac{\cancel{2t}}{u} \frac{du}{\cancel{2t}} = \int \frac{1}{u}\,du$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = t^2+1 \\ du = 2t\,dt \end{array}}$$

$$= \ln|u| + C = \ln(t^2+1) + C$$

Int. faktor: $u = e^{\ln(t^2+1) + \cancel{C}} = \underline{t^2+1}$

$C=0$

$$y' + \frac{2t}{t^2+1} y = \frac{1}{t^2+1} \quad \Big| \cdot u = t^2+1$$

$$(t^2+1)y' + 2ty = 1$$

$$\big((t^2+1)y\big)' = 1 \Rightarrow \frac{(t^2+1)y}{t^2+1} = \int 1 \, dt = \frac{t+C}{t^2+1}$$

$$y = \frac{t+C}{t^2+1}$$