	Emne	Kompendium
1	Repetisjon og oppgaveregning	
2	Første ordens differensiallikninger	[E] 7.1 - 7.3
3	Separable differensiallikninger	[E] 7.4

Oppgaver for Forelesning 11	
Oppgaver fra arbeidsboken	[DA] 11.1 - 11.13
Oppgaver fra kompendiet	[E] 7.1 - 7.13

① Repetisjon:

$X | Y = y$ stokastisk variabel med tetthetsfn. når $f_Y(y) \neq 0$.

$$\boxed{f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}}$$

Kovariansmatrisen:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1,X_2) & \cdots \\ Cov(X_1,X_2) & Var(X_2) & \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$n \times n$ symm. pos. semidefn. matrise slik at:

$$Z = w_1 X_1 + w_2 X_2 + \cdots + w_n X_n \Rightarrow Var(Z) = \underline{w}^T \Sigma \, \underline{w}$$

Opps [DA] 104 (e)

$$f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-2x-3y} & , x,y \geq 0 \\ 0 & , \text{ellers} \end{cases}$$

(a) $f_X(x) = 2e^{-2x}, \ x \geq 0$

(d) $f_Y(y) = 3e^{-3y}, \ y \geq 0$

X og Y uavh: $f_X(x) \cdot f_Y(y) = 6e^{-2x-3y}, \ x,y \geq 0$

$= f(x,y)$ ok.

e) $$p(X \geq 1, Y \leq 1) = \int_1^{\infty} \int_{-\infty}^{1} f(x,y)\,dy\,dx = \int_1^{\infty}\int_{-\infty}^{1} f_X(x)\, f_Y(y)\,dy\,dx$$

$$= \int_1^{\infty} f_X(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{1} f_Y(y)\,dy}_{p(Y\leq 1)}\,dx = P(Y \leq 1) \cdot \underbrace{\int_1^{\infty} f_X(x)\,dx}_{p(X \geq 1)} = p(X \geq 1) \cdot p(Y \leq 1)$$

$$= (1 - F_X(1)) \cdot F_Y(1) = (\cancel{1} - (\cancel{1} - e^{-2\cdot 1})) \cdot (1 - e^{-3\cdot 1})$$

$$= e^{-2}(1 - e^{-3}) = \underline{\underline{\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^5}}}$$

Z: $f_Z(z) = \lambda \cdot e^{-\lambda z}, \ z \geq 0$ $\qquad \lambda = 2: \ Z = X$

$\qquad \lambda = 3: \ Z = Y$

$$F_Z(a) = \int_{-\infty}^{a} \lambda \cdot e^{-\lambda z}\,dz$$

$$= \left[-e^{-\lambda z}\right]_0^a = -e^{-\lambda a} + e^{-\lambda \cdot 0} = \underline{1 - e^{-\lambda a}}, \ a \geq 0$$

når

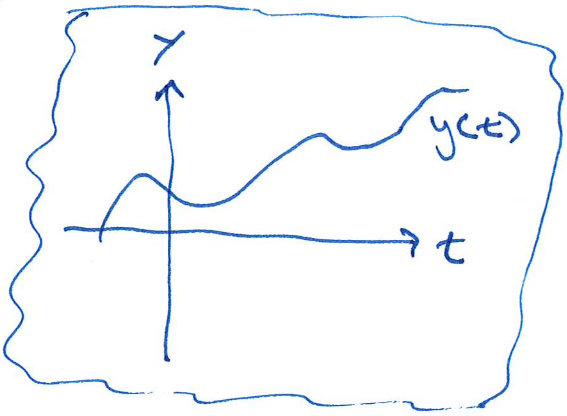
2 Første ordens differensiallikninger

Defn. En differensiallikning er en likning der den ukjente er en funksjon, og likningen inneholder deriverte og/eller høyere ordens deriverte av den ukjente funksjonen.

Eks: $y' = 12t - 6$ eller $y' = y \cdot t$ eller $y'' - y = t$

Ukjent: $y(t)$

$$y' = y'(t), \quad y' = y'(t),\ y = y(t), \quad y'' = y''(t),\ y = y(t)$$



Ordinær diff.likning: kun én variabel

t = tid (nesten alltid)

Første ordens diff.likning inneholder y' men ikke høyere ordens deriverte

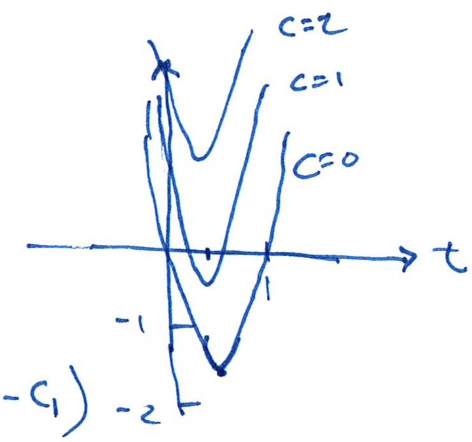
Eks: $\boxed{y' = 12t - 6}$ $\mid \int \dots dt$

$$\int y'\,dt = \int 12t - 6\,dt$$

$$y + C_1 = 12 \cdot \tfrac{1}{2}t^2 - 6t + C_2$$

$$y = 6t^2 - 6t + C_3 \quad (C_3 = C_2 - C_1)$$

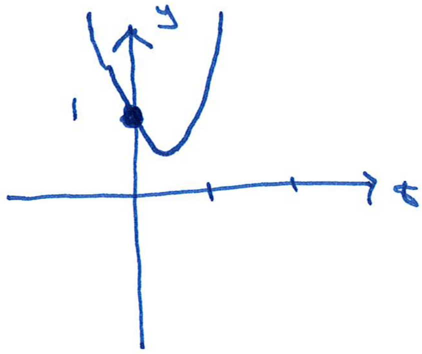
generell løsning



$C_3 = 0$: $y = 6t^2 - 6t$
$= 6(t^2 - t + 1/4) - 6/4$

$= 6(t - 1/2)^2 - 3/2$

$$\underbrace{y' = 12t - 6}_{\text{diff. likning}}, \quad \underbrace{y(0) = 1}_{\text{start-betingelse}}$$



Løsn: $y = 6t^2 - 6t + C$ generell løsn.

$y(0)=1$: $1 = 6 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + C$

$t=0, y=1$ $\quad C = 1$

$y = 6t^2 - 6t + 1$ partikulær løsning

Fakta: – første ordens differensiallikninger har generell løsn. som avhenger av én ubestemt parameter C

Enkleste tilfelle:
$$\boxed{\begin{array}{l} y' = F(t) \quad \text{løses med enkel integrasjon} \\ y = \int F(t)\,dt \end{array}}$$

③ Separable differensiallikninger:

Eks: $y' = 2y = \underbrace{2}_{\substack{t \\ \text{(uttrykk)} \\ f(t)}} \cdot \underbrace{y}_{\substack{y \\ \text{(uttrykk)} \\ g(y)}} \quad | : y$

Kan ikke løses ved enkel integrasjon:

$y' = 2y \quad | \int \ldots dt$

$y = \int 2\underset{\substack{\| \\ y(t)}}{y}\,dt$?

$\frac{1}{y} \cdot y' = 2 \quad \leftarrow$ separert form

$$\frac{1}{y}y' = 2 \qquad \Big| \int \_\_ \, dt$$

$$\int \frac{1}{y}\underline{y'\,dt} = \int 2\,dt = 2t + C_2$$

Substitusjon:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= y(t) \\ du &= y'(t)\,dt \end{aligned}}$$

$$\int \frac{1}{u}\,du = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + C_1$$

Altså: $\frac{1}{y}y' = 2$

$y'dt = dy$

$$\int \frac{1}{y}y'\,dt = \int 2\,dt$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = 2t + C_2$$

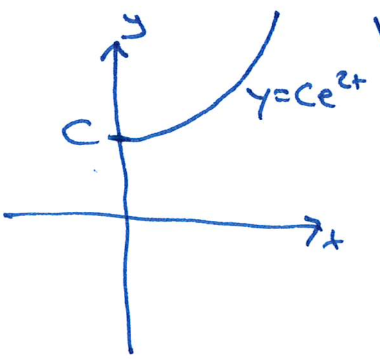
$$\ln|y| + C_1 = 2t + C_2$$

løsn. av diff. likn på implisitt form

"vanlig likn."

$$\ln|y| = 2t + \underbrace{C_2 - C_1}_{C_3}$$

$$\ln|y| = 2t + C_3 \qquad \Big| e^{\cdot}$$



$$e^{\ln|y|} = e^{2t + C_3}$$

$$|y| = e^{2t + C_3} = e^{2t}\cdot e^{C_3}$$

$C = \pm e^{C_3}$

generell løsn. på eksplisitt form $\longrightarrow$

$$y = \pm e^{2t}\cdot e^{C_3} = \pm e^{C_3}\cdot e^{2t} = \underline{\underline{C\cdot e^{2t}}}$$

Eks: $y' = \underbrace{t}_{f(t)} \cdot \underbrace{y}_{g(y)} \quad | : y$

$\frac{1}{y} y' = t \quad | \int \ldots dt$

$dy = y' dt$

$\int \frac{1}{y} y' dt = \int t \, dt$

$\int \frac{1}{y} dy = \int t \, dt$

$\ln|y| = \frac{1}{2}t^2 + C \quad | e^{\cdot}$

$|y| = e^{\frac{1}{2}t^2 + C} = e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot e^C$

$\rightarrow y = \pm e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot e^C$

$y = K \cdot e^{\frac{1}{2}t^2}$

Generelt: – Første ordens diff.likning kan nesten alltid skrives på formen $y' = F(t, y)$.

– Den er separabel hvis $F(t, y) = f(t) \cdot g(y)$

Eks: (1) $y' + y = t$ ikke separabel

$y' = t - y \neq f(t) \cdot g(y)$

(2) $y' = e^y \cdot \sqrt{t}$ separabel

$\frac{1}{e^y} y' = t^{1/2}$

$\int e^{-y} dy = \int t^{1/2} dt$

$-e^{-y} = \frac{2}{3} t^{3/2} + C \quad | \cdot (-1)$

Løsn. metode for separable diff.likn.:

$y' = f(t) \cdot g(y) \quad | : g(y)$

$\frac{1}{g(y)} y' = f(t) \quad | \int \ldots dt$

$\int \frac{1}{g(y)} y' dt = \int f(t) \, dt$

$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) \, dt$

Generell løsn. på implisitt form etter at vi har løst integralene.

$e^{-y} = \cancel{\frac{1}{e^y}} = -\frac{2}{3}t\sqrt{t} - c \quad \Big| \ln(\cdot)$ $\qquad -\frac{2}{3}t\sqrt{t} - C > 0$

$-y = \ln\left(-\frac{2}{3}t\sqrt{t} - c\right)$

$y = -\ln\left(-\frac{2}{3}t\sqrt{t} - c\right)$ //

$y' = e^{y}\cdot\sqrt{t} \quad (t \geq 0), \quad y(0) = 1$

$t=0,\ y=1$

$\underline{y = -\ln\left(\frac{1}{e} - \frac{2}{3}t\sqrt{t}\right)}$

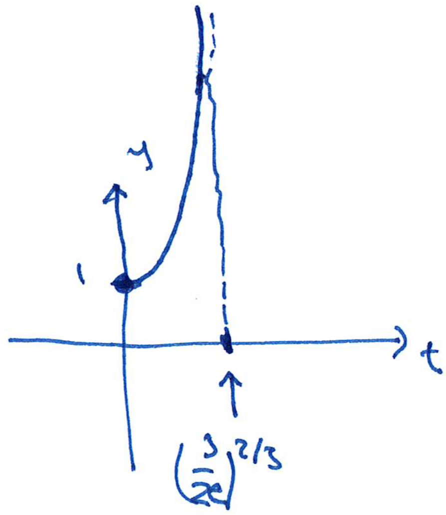
$e^{-1} = \cancel{-\frac{2}{3}\cdot 0\sqrt{0}} - C$

$\underline{C = -e^{-1} = -\frac{1}{e}}$

$\frac{1}{e} = \frac{2}{3}t^{3/2} \quad \Big| \cdot \frac{3}{2}$

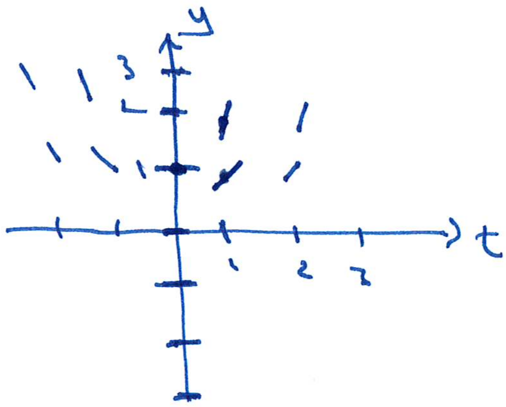
$\frac{3}{2e} = t^{3/2}$

$\underline{t = \left(3/2e\right)^{2/3}}$



<u>Fase-diagram:</u> $y' = F(t,y)$

<u>Eks:</u> $y' = ty$



$F(1,1) = 1\cdot 1 = 1$

$F(1,2) = 1\cdot 2 = 2$

Eks. V2017, Opps. 3c

$$y' = \underbrace{2t}_{f(t)} \underbrace{e^{-y}}_{g(y)}, \quad y(0) = 0$$

$y' = 2t \cdot e^{-y} \quad | \cdot e^{y}$

$e^{y} \cdot y' = 2t \quad | \int \ldots dt$

$\int e^{y} \underbrace{y' dt}_{dy} = \int 2t\, dt$

$\int e^{y} dy = t^2 + C$

$e^{y} = t^2 + C \quad | \ln(\cdot)$

$y = \underline{\ln(t^2 + C)}$ generell løsn.

eller

$\underline{y(0) = 0}$:

$t = 0, y = 0$

$e^0 = 0^2 + C$

$1 = C \Rightarrow \underline{C = 1}$

Part. løsn: $y = \underline{\underline{\ln(t^2+1)}}$

Eks: $y' = t \cdot y^2$

$$\frac{1}{y^2} y' = t$$

$$\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int t\, dt$$

$$\int y^{-2}\, dy = \frac{1}{2}t^2 + C$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} = \frac{1}{2}t^2 + C$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}t^2 + C$$

$$\frac{1}{y} = \frac{-\frac{1}{2}t^2 - C}{1} \quad | \cdot y$$

$$1 = \left(-\frac{1}{2}t^2 - C\right) \cdot y$$

$$\frac{1 \cdot 2}{\left(-\frac{1}{2}t^2 - C\right) \cdot 2} = y$$

$$y = \frac{2}{-t^2 - 2C}$$

Eks V2017, 3a):

$$y' + (2t+1)y = e^{-t^2}$$

$$y' = e^{-t^2} - (2t+1)y \neq f(t) \cdot g(y) \leftarrow \text{ikke separabel}$$