Eivind Eriksen

Digital Arbeidsbok i ELE 3719 Matematikk

29. januar 2025

Handelshøyskolen BI

Innhold

Del I
Forelesninger i ELE3719 Matematikk

Forelesning 1
Vektorer og vektorregning

1.1 Kort sammendrag

En n-vektor er et n-tuppel av tall $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Den kalles ofte kun for en vektor, og skrives gjerne som en kolonnevektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Vi kan tolke en vektor som en forflytning, og framstille den geometrisk som en pil som starter i origo og ender i punktet $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ i et n-dimensjonalt koordinatsystem, eller mer generelt, en pil der endring i i'te koordinat fra startpunkt til sluttpunkt er v_i. Lengden av vektoren $\mathbf{v}$ er gitt ved

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Addisjon og subtraksjon av vektorer, og skalarmultiplikasjon (multiplikasjon av en vektor med et tall) er viktige regneoperasjoner for vektorer, som gir nye vektorer som svar. Disse operasjonene skrives

$$\mathbf{v} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{v} - \mathbf{w}, \quad r\mathbf{v}$$

og utføres komponent for komponent. Nullvektoren $\mathbf{0}$ er vektoren $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. En lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ er et uttrykk på formen

$$r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_m\mathbf{v}_m$$

der $r_1, \ldots, r_m$ er vilkårlige tall. Mengden av alle slike lineærkombinasjoner skrives $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m)$. Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ kalles lineært avhengige om minst en av vektorene kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre, og vektorene kalles lineært uavhengige ellers.

Indreproduktet $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ mellom to vektorer (som også kalles for prikkproduktet eller skalarproduktet) er gitt ved

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$$

Det gir et tall (og ikke en vektor) som svar. Indreproduktet har følgende egenskaper:

1. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$
2. $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}$
3. $(r\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = r(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$
4. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, og likhet holder kun hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Vi sier at vektorene $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ er ortogonale hvis $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$, og skriver i så fall $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$. Når vektorene kan tolkes geometrisk i et 2- eller 3-dimensjonalt koordinatsystem, så betyr dette at vektorene står normalt eller vinkelrett på hverandre. Lengden til en vektor $\mathbf{v}$ kan skrives ved hjelp av indreproduktet som $||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$.

Tolkningen av indreproduktet $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ er knyttet til vinkelen mellom vektorene. Cauchy-Schwarz' ulikhet kan skrives $-1 \leq \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \leq 1$ når vektorene har lengde $||\mathbf{v}|| = ||\mathbf{w}|| = 1$, og mer generelt som

$$-1 \leq \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}||} \leq 1$$

når vektorene $\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Sammenhengen mellom vinkelen α mellom vektorene og indreproduktet $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ kan skrives $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \cos(\alpha)$ når vektorene har lengde 1.

1.2 Oppgaver

1.1. Regn ut vektorene $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, $3\mathbf{v}$ og $2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$ når

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1.2. Regn ut vektorene $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, $2\mathbf{v}$ og $3\mathbf{v} - \mathbf{w}$ når

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1.3. Løs følgende likning for den ukjente vektoren:

$$2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.4. Vis at følgende vektorlikning kan skrives som to lineære likninger i to ukjente:

$$x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

Hva blir likningsystemet? Finn også løsningene av likningssystemet.

1.5. Avgjør om $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ når

$$\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\quad\text{og}\quad\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

1.6. Avgjør om $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ når

$$\mathbf{w}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\quad\text{og}\quad\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},\quad\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

1.7. Avgjør om $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ når

$$\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad\text{og}\quad\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}5\\0\\-5\end{pmatrix},\quad\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

1.8. Regn ut $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ og $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ når

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\quad\text{og}\quad\mathbf{w}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

1.9. Finn alle vektorer som står vinkelrett på $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ når

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}\quad\text{og}\quad\mathbf{w}=\begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}$$

1.10. Bestem de verdiene av h slik at de tre vektorene er lineært uavhengige:

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix},\quad\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix},\quad\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\h\end{pmatrix}$$

1.11. Vis at at linjestykket fra $(0,0,0)$ til (a,b,c) har lengde gitt ved

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

1.3 Løsninger

1.1 Vi har at

$$\mathbf{v}+\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 3\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad 2\mathbf{v}-3\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}$$

1.2 Vi har at

$$\mathbf{v}+\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad 2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad 3\mathbf{v}-\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1.3 Vi har at

$$2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ -19 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 6 \\ -19/2 \end{pmatrix}$$

1.4 Vi kan skrive likningen som

$$\begin{pmatrix} x+3y \\ 2x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

det vil si som likningssystemet

$$\begin{aligned} x + 3y &= 3 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}$$

Ved å legge sammen første likning med 3 ganger andre likning, kan vi eliminere y, og får at $7x = 6$, eller $x = 6/7$. Innsetting i andre likning gir da $y = 2x-1 = 5/7$. Likningssystemet har derfor løsningen $(x,y) = (6/7, 5/7)$.

1.5 Vi ser at $\mathbf{w}$ er lineærkombinasjonen

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3$$

1.6 Vi ser at $\mathbf{w}$ er lineærkombinasjonen

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

1.7 Vi ser at $\mathbf{w}$ ikke er en lineærkombinasjonen av de andre vektorene siden vektorlikningen

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

gir et likningsssystem med tre likninger, og den andre likningen er

$$1 = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0$$

Det finnes selvsagt ingen verdier av de ukjente slik at $1 = 0$, derfor har likningssystemet ingen løsninger. Det betyr at $\mathbf{w}$ ikke er en lineærkombinasjon av de andre vektorene.

1.8 Vi har at

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 2\cdot 3 + (-1)\cdot 4 = 2 \quad \text{og} \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) = 5$$

Siden $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$, er $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = 2+5 = 7$.

1.9 Vi kaller den ukjente vektoren $\mathbf{x} = (x,y,z)$. At den står vinkelrett på $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ gir betingelsene

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 3y + 4z = 0$$

og

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{w} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x + 2y + 3z = 0$$

Løser vi de to likningene, gir den første at $z = (-2x+3y)/4 = -x/2 + 3y/4$. Setter vi dette inn i den andre likningen får vi at

$$-3x + 2y + 3(-x/2 + 3y/4) = 0 \quad \text{eller} \quad -9x/2 + 17y/4 = 0$$

Den siste likningen gir $-18x + 17y = 0$, eller $y = 18x/17$. Setter vi dette inn i uttrykket for z, får vi

$$z = -x/2 + 3y/4 = -x/2 + 3/4(18x/17) = \frac{-2\cdot 17 + 3\cdot 18}{4\cdot 17}\,x = \frac{5}{17}\,x$$

Dermed er alle vektorene som står normalt på $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ på formen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 18x/17 \\ 5x/17 \end{pmatrix} = \frac{x}{17}\begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dette er altså alle multipler av vektoren $(17,18,5)$.

1.10 Vektorene er lineært uavhengige om ingen av vektorene kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre, det vil si hvis likningen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

kun har den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Hvis det finnes andre løsninger, så kan vi jo bruke disse til å uttrykke én av vektorene som en lineærkombinasjon av de andre. Vi må derfor løse denne likningen og undersøke om det finnes andre løsninger enn den trivielle. Vi får likningssystemet

$$\begin{aligned} x - 2y - z &= 0 \\ 3x - 4y + z &= 0 \\ -3x + y + hz &= 0 \end{aligned}$$

Vi bruker den første likningen til å eliminere x fra de andre likningene. Da får vi

$$\begin{aligned} x - \quad 2y - \qquad\quad z &= 0 \\ 2y + \qquad 4z &= 0 \\ -5y + (h-3)z &= 0 \end{aligned}$$

Deretter bruker vi den andre likningen til å eliminere y fra siste likning. Det gir

$$\begin{aligned} x - 2y - \qquad\quad z &= 0 \\ 2y + \qquad 4z &= 0 \\ (h+7)z &= 0 \end{aligned}$$

Hvis $h \neq -7$, gir den siste likningen $z = 0$. Innsetting i likningen over gir $y = 0$, og innsetting i den første likningen gir $x = 0$. Vi får dermed kun løsningen $x = y = z = 0$ når $h \neq -7$, og vektorene er lineært uavhengige i dette tilfellet. Hvis $h = -7$, så er den siste likningen $0 = 0$, og z blir en fri variabel. Vi har derfor (mange) andre løsninger enn den trivielle, og vektorene er lineært avhengige. Svaret er derfor at vektorene er lineært uavhengige hvis og bare hvis $h \neq -7$.

1.11 Vi kan tenke oss et rektangulært prisme, der grunnflaten er et rektangel med lengde a og bredde b, og høyden er c. Da er $(0,0,0)$ og (a,b,c) to motsatte hjørner, og vi må finne lengden L av linjestykket mellom disse to hjørnene. Diagonalen i grunnflaten, fra $(0,0,0)$ til $(a,b,0)$, har lengde

$$\sqrt{a^2+b^2}$$

ved Pytagoras' setning. Lengden L er derfor hypotenusen i en rettvinklet trekant med kateter av lengde $\sqrt{a^2+b^2}$ og c. Dermed har vi (igjen ved Pytagoras') at

$$L^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + c^2 = a^2+b^2+c^2 \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Forelesning 2
Vektorrom, vektorlikninger og lineære systemer

2.1 Kort sammendrag

Et $m \times n$ *lineært system* i variablene $x_1, x_2, \dots, x_n$ er et system av m lineære likninger i disse variablene, og kan skrives på standardform som

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Det lineære systemet kan skrives mer kompakt ved hjelp av matriser, og vi bruker ofte den *utvidede matrisen* $(A|\mathbf{b})$ dannet fra koeffisientmatrisen A ved

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Det lineære systemet kalles *homogent* hvis $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, og slike systemer har alltid den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Ethvert lineært system har enten ingen løsninger, én entydig løsning eller uendelig mange løsninger.

Gauss' eliminasjonsmetode er en effektiv algoritme som kan brukes til å løse alle lineære systemer. Vi bruker *elementære radoperasjoner* på den utvidede koeffisientmatrisen inntil vi har en *trappeform*, skriver om til et lineært system igjen, and løser det ved *baklengs substitusjon*. Følgende operasjoner er elemenære radoperasjoner:

1. Å legge til et multippel av en rad til en annen rad
2. Å bytte om to rader
3. Å multiplisere en rad med et tall ulik null

En *ledende koeffisienten* eller *pivot* er det første elementet i en rad som er ulik null. En matrise er på *trappeform* om følgende betingelser holder:

- Alle rader med bare nuller står nederst i matrisen.
- Hver pivot står lenger til høyre enn pivotene i radene ovenfor.

En pivotposisjon er en posisjon som inneholder en pivot når matrisen er på trappeform. *Baklengs substitusjon* er prosessen hvor vi løser likningene i baklengs rekkefølge. Hver likning løses for variabelen i pivotposisjonen. Variablene som ikke er i pivotposisjoner kalles *frie variabler*.

Lemma 2.1. *Enhver matrise kan gjøres om til trappeform ved hjelp av elementære radoperasjoner. Trappeformen er ikke entydig, men pivot-posisjonene er det.*

Rangen til en matrise A, som skrives $\operatorname{rk} A$, er antallet pivot-posisjoner i A. Vi kan finne rangen ved å finne en trappeform for A og telle antall pivoter.

Dersom $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ er vektorer, så kalles $V = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ for vektorrommet utspent av disse vektorene. Vektorene $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ danner en *basis* for V hvis de er lineært uavhengige, og det er tilfellet hvis og bare hvis vektorlikningen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

kun har den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Vi kan undersøke dette ved å bruke det vi vet om lineære systemer: Vi danner matrisen A med vektorene som kolonner, og finner pivotposisjonene til A ved å gjøre den om til en trappeform.

1. Vektorene er lineært uavhengige hvis og bare hvis $\operatorname{rk}(A) = n$, det vil si at det er en pivot-posisjon i hver kolonne.
2. Kolonnevektorene i A som svarer til pivot-posisjoner danner en basis for vektorrommet $V = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Dimensjonen til vektorrommet $V = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ er antall vektorer i en basis, og vi har at $\dim V = \operatorname{rk} A$.

2.2 Oppgaver

2.1. Skriv ned koeffisientmatrisen og den utvidede matrisen i hvert tilfelle:

$$a)\quad \begin{aligned} 2x + 5y &= 6 \\ 3x - 7y &= 4 \end{aligned} \qquad\qquad b)\quad \begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y + z &= 2 \\ x - 2y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

2.2. Skriv ned det lineære systemet i variablene x, y, z med utvidet matrise

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

2.3. Løs det lineære systemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 4 \\ x + 2y + 4z &= 7 \end{aligned}$$

2.4. For hvilke verdier av h har det lineære systemet løsninger?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 4 \\ x + 2y + z &= h \end{aligned}$$

2.5. Løs de lineære systemene ved hjelp av Gauss-eliminasjon:

$$a)\quad \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 4 \\ x + 2y + 4z &= 7 \end{aligned} \qquad b)\quad \begin{aligned} 2x + 2y - z &= 2 \\ x + y + z &= -2 \\ 2x + 4y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

2.6. Løs de lineære systemene

$$a)\quad \begin{aligned} -4x + 6y + 4z &= 4 \\ 2x - y + z &= 1 \end{aligned} \qquad b)\quad \begin{aligned} 6x + y &= 7 \\ 3x + y &= 4 \\ -6x - 2y &= 1 \end{aligned}$$

2.7. Bestem løsningene for alle verdier av parametrene a og b:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ -x + ay - 21z &= 2 \\ 3x + 7y + az &= b \end{aligned}$$

2.8. Finn pivot-posisjonene til matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

2.9. Vis at systemet har uendelig mange løsninger. Finn så frie variabler og uttrykk de andre variablene ved hjelp av de frie:

$$\begin{aligned} x + 6y - 7z + 3w &= 1 \\ x + 9y - 6z + 4w &= 2 \\ x + 3y - 8z + 4w &= 5 \end{aligned}$$

2.10. Løs de lineære systemene:

$$a)\quad \begin{aligned} x - 3y + 6z &= -1 \\ 2x - 5y + 10z &= 0 \\ 3x - 8y + 17z &= 1 \end{aligned} \qquad b)\quad \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 12x + 2y - 3z &= 5 \\ 3x + 4y + z &= -4 \end{aligned}$$

2.11. Finn rangen til matrisene:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2.12. Finn rangen til matrisene:

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.13. Vis at et 4×6 homogent lineært system har ikke-trivielle løsninger.

2.14. Finn en basis for vektorrommet $V = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ utspent av vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2.3 Løsninger

Legg merke til: Vi regner ut en trappeform i flere av oppgavene, og en trappeform er ikke entydig. Dermed er det fullt mulig å komme fram til en annen trappeform enn i løsningene nedefor som gir riktig svar.

2.1 Koeffisientmatrisen og den utvidede matrisen til systemet er gitt ved

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 6 \\ 3 & -7 & 4 \end{array}\right) \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

2.2 Det lineære systemet er gitt ved

$$\begin{aligned} x + 2y \phantom{{}+z} &= 4 \\ 2x - 3y + z &= 0 \\ 7x + 4y + z &= 3 \end{aligned}$$

2.3 Vi bruker substitusjon til å løse det lineære systemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 4 \\ x + 2y + 4z &= 7 \end{aligned}$$

Vi løser første likning for z og får $z = 1-x-y$. Vi setter så dette uttrykket for z inn i de to siste likningene og får

$$\begin{aligned} -\ 2y &= 3 \\ -3x -\ 2y &= 3 \end{aligned}$$

Vi løser så den første av disse likningene for y, og får $y = -1.5$. Når vi setter dette inn for y i den siste av likningene, får vi $x = 0$. Til slutt setter vi inn begge disse uttrykkene inn i $z = 1-x-y$ og får $z = 2.5$. Løsningen er $x = 0,\ y = -1.5,\ z = 2.5$.

2.4 Vi bruker substitusjon til å løse det lineære systemet

$$\begin{aligned} x + \ \ y + z &= 1 \\ x - \ \ y + z &= 4 \\ x + 2y + z &= h \end{aligned}$$

Vi løser første likning for z og får $z = 1-x-y$. Vi setter så dette uttrykket for z inn i de to siste likningene og får

$$\begin{aligned} -\ 2y &= 3 \\ y &= h-1 \end{aligned}$$

Vi løser så den første av disse likningene for y, og får $y = -1.5$. Når vi setter dette inn for y i den siste av likningene, får vi $-1.5 = h-1$. Hvis $h = -0.5$ så er denne likningen oppfyllt, og systemet har uendelig mange løsninger: x er en fri variabel, $y = -1.5$ og $z = 1-x-y = 2.5-x$. Hvis $h \neq -0.5$, så gir den siste likningen en selvmotsigelse, og systemet har ingen løsninger. Vi konkluderer at systemet har løsninger hvis og bare hvis $h = -0.5$.

2.5 Vi skriver ned den utvidede matrisen til systemet i hvert tilfelle, og bruker elementære radoperasjoner til å gjøre den om til trappeform:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 7.5 \end{array}\right)$$

Ved baklengs substitusjon får vi $z = 2.5$ i siste likning, $y = -1.5$ i andre likning, og $x = 0$ i første likning. Det betyr at løsningen er $x = 0,\ y = -1.5,\ z = 2.5$.

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1.5 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1.5 & -3 \end{array}\right)$$

Ved baklengs substitusjon får vi $z = -2$ i siste likning, $y = -3$ i andre likning, og $x = 3$ i første likning. Det betyr at løsningen er $x = 3,\ y = -3,\ z = -2$.

2.6 Vi bruker Gauss-eliminasjon for å løse de lineære systemene:
a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 6 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Vi ser at z er en fri variabel og at systemet har uendelig mange løsninger. Andre likning gir $2y = 3-3z$, eller $y = 3/2 - 3z/2$, og satt inn i første likning gir dette $-4x + 6(3/2-3z/2) + 4z = 4$, eller $-4x + 9 - 5z = 4$. Vi løser likningen for x og får $-4x = -5+5z$, eller $x = 5/4 - 5z/4$. Løsningene kan skrives $x = 5/4 - 5z/4$ og $y = 3/2 - 3z/2$ der z er en fri variabel.
b)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ -6 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 7 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 8 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 7 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

Vi ser at det lineære systemet ikke har noen løsninger.

2.7 We finner den utvidede matrisen til det lineære systemet og gjør det om til en trappeform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & a & -21 & 2 \\ 3 & 7 & a & b \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a+2 & -18 & 3 \\ 0 & 1 & a-9 & b-3 \end{array}\right)$$

Vi bytter så om de to siste radene for å unngå å dele på $a+2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & a-9 & b-3 \\ 0 & a+2 & -18 & 3 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & a-9 & b-3 \\ 0 & 0 & -18-(a-9)(a+2) & 3-(b-3)(a+2) \end{array}\right)$$

Vi regner ut $-18-(a-9)(a+2) = 7a - a^2$. Det betyr at når $a \neq 0$ og $a \neq 7$, så har systemet en entydig løsning. Når $a = 0$, regner vi ut $3-(b-3)(a+2) = 9-2b$. Det betyr at når $a = 0$ og $b \neq 9/2$, så har systemet ingen løsninger, og når $a = 0$, $b = 9/2$, så har systemet undelig mange løsninger (en frihetsgrad). Når $a = 7$, regner vi ut $3-(b-3)(a+2) = 30-9b$. Det betyr at når $a = 7$ og $b \neq 30/9 = 10/3$, så har systemet ingen løsninger, og når $a = 7$, $b = 10/3$, så har systemet uendelig mange løsninger (en frihetsgrad).

2.8 Vi reduserer matrisen til trappeform ved å bruke elementære radoperasjoner:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -7 & -11 & -3 & -14 \\ 0 & 6 & 6 & 5 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & \boxed{-7} & -11 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & \boxed{-24/7} & * & * \end{pmatrix}$$

Vi har ikke regnet ut elementene merket $*$ siden de ikke er nødvendige for å finne pivotposisjonene, og vi har merket pivotposisjonene med en boks.

2.9 Vi finner den utvidede matrisen og reduserer den til en trappeform ved å bruke elementære radoperasjoner:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -7 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -8 & 4 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Vi ser at systemet har uendelig mange løsninger og en frihetsgrad (z er en fri variabel og x,y,w er avhengige variabler). For å skrive x,y,w ved hjelp av z, bruker vi baklengs substitusjon: Siden $2w = 5$, så er $w = 5/2$. Setter vi det inn i den andre likingen, får vi $3y = 1 - z - 5/2 = -z - 3/2$, eller $y = -z/3 - 1/2$. Setter vi inn i den første likingen, får vi $x = 1 - 6(-z/3 - 1/2) + 7z - 3(5/2) = 9z - 7/2$ (der z er en fri variabel).

2.10 I hvert tilfelle finner vi den utvidede matrisen til det lineære systemet og reduserer den til trappeform:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 6 & -1 \\ 2 & -5 & 10 & 0 \\ 3 & -8 & 17 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Baklengs substitusjon gir $x = 5,\ y = 6,\ z = 2$.

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 12 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -35 & -35 \end{array}\right)$$

Baklengs substitusjon gir $x = 1,\ y = -2,\ z = 1$.

2.11 I hvert tilfelle reduserer vi matrisen til trappeform og teller pivotposisjonene for å finne rangen:

a) Vi ser at rangen til A er 1 siden trappeformen har en pivotposisjon.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Vi ser at rangen til A er 2 siden trappeformen har to pivotposisjoner.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{-6} & -7 \end{pmatrix}$$

c) Vi ser at rangen til A er 2 siden trappeformen har to pivotposisjoner.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.12 I hvert tilfelle reduserer vi matrisen til trappeform og teller pivotposisjonene for å finne rangen:
a) Vi ser at rangen til A er 3 siden trappeformen har tre pivotposisjoner:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \end{pmatrix}$$

b) Vi ser at rangen til A er 2 siden trappeformen har to pivotposisjoner:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4.5 & 4.5 & 4.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 3 & 7 \\ 0 & \boxed{4.5} & 4.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Vi ser at rangen til A er 3 siden trappeformen har tre pivotposisjoner:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -9 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi bytter om de to midterste radene for å forenkle regningen videre:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 14 & 20 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-7} & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.13 La A være 4×6 koeffisientmatrisen til det homogene lineære systemet. Da er $n = 6$ (vi har 6 variabler) mens $\operatorname{rk} A \leq 4$ (det kan maksimalt være én pivotposisjon per rad). Derfor er det minst to frihetsgrader, og systemet har derfor (uendelig mange) ikke-trivielle løsninger.

2.14 Fra oppgave 2.12 c) vet vi at matrisen med disse vektorene som kolonner har pivot-posisjoner i de tre første kolonnene. Derfor er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ en basis for $V = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ (og $\mathbf{v}_4$ er en lineærkombinasjon av disse tre basisvektorene).

Forelesning 3
Matriser og matriseregning

3.1 Kort sammendrag

En $m \times n$ *matrise* er en samling av tall ordnet i m rader og n kolonner, og skrives

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Viktige operasjoner for matriser er addisjon, subtraksjon, transponering, multiplikasjon og skalarmultiplikasjon (multiplikasjon av en matrise med et tall), og skrives

$$A+B, \quad A-B, \quad A^T, \quad AB, \quad rA$$

Disse operasjonene gir nye matriser som svar. Regning med matriser følger de fleste regneregler som gjelder for regning med tall, men AB er ikke nødvendigvis lik BA når A,B er matriser, og $AB = 0$ betyr ikke nødvendigvis at $A = 0$ eller $B = 0$. Merk at $Ar = rA$ når r er et tall og at $(AB)^T = B^T A^T$.

En kvadratisk matrise er en matrise med like mange rader som kolonner. For kvadratiske matriser kan vi regne ut potensene

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m \text{ faktorer}}$$

Det er ofte arbeidskrevende å regne ut potenser av matriser, men om A er en diagonal matrise (dvs $a_{ij} = 0$ om $i \neq j$) er det enklere:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^m = \begin{pmatrix} a_{11}^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^m \end{pmatrix}$$

En kvadratisk matrise kalles invertibel med invers A^{-1} om det finnes en matrise A^{-1} slik at $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = I$, hvor $I = I_n$ er identitetsmatrisen (den diagonale matrisen med $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$). Videre er A symmetrisk om $A^T = A$.

Determinanten $\det(A) = |A|$ er en funksjon som er definert for alle kvadratiske matriser A, og som gir et tall som svar. En viktig egenskap er at

$$A \text{ er invertibel} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0$$

Determinanten har egenskapen at $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ og at $\det(A^T) = \det(A)$. Hvis A,B er invertible, så er $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Determinanter kan regnes ut ved hjelp av kofaktorutvikling eller ved hjelp av Gauss-eliminasjon. For 2×2-matriser har vi at

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \text{og} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Et homogent $m \times n$ lineært system kan skrives på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Om det lineære systemet er kvadratisk ($m = n$) og homogent ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$), så har vi at

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rk}(A) = n \quad \Leftrightarrow \quad A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ har kun triviell løsning } \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Hvis $\det(A) = 0$, betyr det at $\mathrm{rk}(A) < n$, og systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har uendelig mange løsninger og $n - \mathrm{rk}(A)$ frihetsgrader (frie variable).

3.2 Oppgaver

3.1. Regn ut $4A + 2B$, AB, BA, BI og IA når

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2. Vis matriseloven $(AB)^T = B^T A^T$ når A og B er 2×2-matriser.

3.3. Forenkle følgende matriseuttrykk:

$$\begin{aligned} a) \quad & AB(BC - CB) + (CA - AB)BC + CA(A - B)C \\ b) \quad & (A - B)(C - A) + (C - B)(A - C) + (C - A)^2 \end{aligned}$$

3.4. En $m \times n$-matrise skrives ofte som $A = (a_{ij})_{m \times n}$, hvor a_{ij} er koeffisienten i A i rad i og kolonne j. Vis at hvis $m = n$ og $a_{ij} = a_{ji}$ for alle i og j, så er $A = A^T$. Gi et konkret eksempel på en matrise med denne egenskapen, og forklar hvorfor det er rimelig å kalle en matrise A symmetrisk når $A = A^T$.

3.5. Regn ut D^2, D^3 og D^n når

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.6. Skriv ned det 3×3 lineære systemet som svarer til matriselikningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3.7. Løs matriselikningen $2A + 3X = I$ for X når

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.8. Skriv det lineære likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

som en matriselikning og som en vektorlikning.

3.9. Regn ut $|A|$ ved hjelp av kofactorutvidelse langs første kolonne, og deretter langs den tredje raden, når

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Sjekk at svaret blir det samme. Er A inverterbar?

3.10. Beregn determinanten ved hjelp av kofaktorutvikling. Det lønner seg å velge en rad eller kolonne slik at regningen blir så enkel som mulig.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

3.11. Beregn determinanten ved hjelp av kofaktorutvikling. Det lønner seg å velge en rad eller kolonne slik at regningen blir så enkel som mulig.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

3.12. La A og B være 3×3-matriser med $|A| = 2$ og $|B| = -5$. Finn $|AB|$, $|-3A|$ og $|-2A^T|$. Regn ut $|C|$ når C er matrisen vi får fra B når vi bytter om to rader.

3.13. Regn ut determinanten ved hjelp av elementære radoperasjoner:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & 15 \\ -3 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

3.14. Finn den inverse matrisen A^{-1}, hvis den eksisterer, når A er matrisen gitt ved

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad c)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.15. Regn ut kofaktormatrisen, den adjungerte matrisen og den inverse matrisen til disse matrisene:

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad b)\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sjekk at $AA^{-1} = I$ og at $BB^{-1} = I$.

3.16. Skriv det lineære systemet av likninger

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 &= 4 \end{aligned}$$

på matriseform $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ og løs det ved å bruke A^{-1}.

3.17. Det finnes en effektiv metode for å finne den inverse til en matrise ved hjelp av radoperasjoner. Anta at vi skal finne den inverse til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Vi skriver da ned matrisen

$$\left(A \middle| I\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

og reduserer den til redusert trappeform ved å bruke elementære radoperasjoner: Først legger vi til (-1) ganger den første raden til den andre raden:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vi legger til (-2) ganger den første raden i siste rad:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vi legger til $(-1$ ganger den andre raden til den tredje raden:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Så legger vi til (-3) ganger den siste raden til den første

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

og (-2) ganger den andre raden til den første:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Vi har nå fått matrisen på formen $(I|A^{-1})$ og derfor er

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bruk samme teknikk til å finne den inverse matrisen til disse matrisene:

$a)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b)$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $c)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $d)$ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3.18. Undersøk om det homogene likningssystemet har ikke-trivielle løsninger:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

3.19. Finn alle løsninger av det homogene likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Hvor mange frihetsgrader har dette likningssystemet?

3.20. Vi betrakter det homogene likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, der A er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

og s er en parameter. For hvilke verdier av s har dette likningssystemet ikke-trivielle løsninger? Finn eventuelt antall frihetsgrader i hvert tilfelle.

3.3 Løsninger

3.1 Vi har at

$$4A + 2B = \begin{pmatrix} 12 & 24 \\ 30 & 4 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 25 & 12 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 28 & 12 \\ 14 & 21 \end{pmatrix}, \quad BI = B, \quad IA = A$$

3.2 La

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

Da får vi

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & bw+ay \\ cx+dz & dw+cy \end{pmatrix} \implies (AB)^T = \begin{pmatrix} ax+bz & cx+dz \\ bw+ay & dw+cy \end{pmatrix}$$

og

$$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} \implies B^T A^T = \begin{pmatrix} ax+bz & cx+dz \\ bw+ay & dw+cy \end{pmatrix}$$

Ved å sammenlikne uttrykkene, ser vi at $(AB)^T = B^T A^T$.

3.3 Vi har

$$\begin{aligned}
(a) \quad & AB(BC-CB) + (CA-AB)BC + CA(A-B)C = ABBC - ABCB + CABC \\
& -ABBC + CAAC - CABC = -ABCB + CAAC = -ABCB + CA^2C \\
(b) \quad & (A-B)(C-A) + (C-B)(A-C) + (C-A)^2 = AC - A^2 - BC + BA + CA \\
& -C^2 - BA + BC + C^2 - CA - AC + A^2 = 0
\end{aligned}$$

3.4 Uttrykket i posisjon (j,i) i A^T er lik uttrykket i posisjon (i,j) i A. Derfor vil en kvadratisk matrise A oppfylle $A^T = A$ hvis $a_{ij} = a_{ji}$. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

har denne egenskapen. Betingelsen $a_{ij} = a_{ji}$ uttrykker symmetri om diagonalen i A, så det er rimelig å kalle en matrise med $A^T = A$ symmetrisk.

3.5 Vi regner ut

$$D^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

3.6 Vi regner ut

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + 5x_3 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

Dermed ser vi at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hvis og bare hvis

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

3.7 Vi har at $2A + 3X = I$ gir $3X = I - 2A$, og dermed at

$$X = \frac{1}{3}(I - 2A) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 - 2\cdot 2 & -2\cdot 3 \\ -2\cdot 0 & 1 - 2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.8 Vi skriver systemet på matriseform som

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og på vektorform som

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.9 Vi regner først ut $|A|$ ved å bruke kofaktorutvikling langs første kolonne:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \\ &= (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= (5\cdot 8 - 0\cdot 6) + 0 + (2\cdot 6 - 5\cdot 3) \\ &= 40 + 12 - 15 = 37 \end{aligned}$$

Så regner vi ut $|A|$ ved å bruke kofaktorutvikling langs tredje rad:

$$\begin{aligned}|A| &= a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}\\ &= (-1)^{3+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix}+(-1)^{3+2}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}1&3\\0&6\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot 8\cdot\begin{vmatrix}1&2\\0&5\end{vmatrix}\\ &= (2\cdot 6-5\cdot 3)+0+8\cdot(1\cdot 5-0\cdot 2)\\ &= 12-15+8\cdot 5=37\end{aligned}$$

Vi ser at $\det(A)=37\neq 0$ ved begge metoder, dermed er A invertibel.

3.10 Vi utvikler langs første kolonne to ganger, og får

$$\begin{vmatrix}3&5&-8&4\\0&2&3&-7\\0&0&1&5\\0&0&0&2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2&3&-7\\0&1&5\\0&0&2\end{vmatrix}=3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1&5\\0&2\end{vmatrix}=3\cdot 2\cdot(1\cdot 2)=12$$

3.11 Vi utvikler langs andre rad og deretter langs andre kolonne, og får

$$\begin{vmatrix}4&0&-7&3&-5\\0&0&2&0&0\\7&3&-6&4&-8\\5&0&5&2&-3\\0&0&9&-1&2\end{vmatrix}=2(-1)\begin{vmatrix}4&0&3&-5\\7&3&4&-8\\5&0&2&-3\\0&0&-1&2\end{vmatrix}=-2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix}4&3&-5\\5&2&-3\\0&-1&2\end{vmatrix}$$

Vi regner så ut 3×3-determinanten ved å utvikle langs først kolonne, og får at

$$\begin{vmatrix}4&0&-7&3&-5\\0&0&2&0&0\\7&3&-6&4&-8\\5&0&5&2&-3\\0&0&9&-1&2\end{vmatrix}=-6(4(4-3)-5(6-5))=-6(-1)=6$$

3.12 Vi regner ut

$$\begin{aligned}|AB| &= |A||B| = 2\cdot(-5)=-10\\ |-3A| &= (-3)^3|A| = (-27)\cdot 2=-54\\ |-2A^T| &= (-2)^3|A^T| = (-8)\cdot|A| = (-8)\cdot 2=-16\\ |C| &= -|B| = -(-5)=5\end{aligned}$$

3.13 Hvis vi legger til første rad i siste rad for å forenkle determinanten, får vi

$$\begin{vmatrix}3&1&5\\9&3&15\\-3&-1&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&5\\9&3&15\\0&0&0\end{vmatrix}=0$$

3.14 For å undersøke om matrisene er invertible, regner vi ut determinantene:

$$a)\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad b)\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0, \quad c)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Dermed er matrisene i b) og c) invertible, og vi har at

$$b)\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad c)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.15 For å finne kofaktormatrisen, må vi regne ut alle kofaktorene til A:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40, C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 6, C_{13} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16, C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5, C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3, C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -6, C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

Fra dette finner vi kofaktormatrisen $C = (C_{ij})$ og den adjungerte matrisen C^T til A:

$$C = \begin{pmatrix} 40 & 6 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C^T = \begin{pmatrix} 40 & 6 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 40 & -16 & -3 \\ 6 & 5 & -6 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Vi fant at determinanten $|A| = 37$ of A i oppgave 3.14. Den inverse matrisen er da

$$A^{-1} = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 40 & -16 & -3 \\ 6 & 5 & -6 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{40}{37} & -\frac{16}{37} & -\frac{3}{37} \\ \frac{6}{37} & \frac{5}{37} & -\frac{6}{37} \\ -\frac{5}{37} & \frac{2}{37} & \frac{5}{37} \end{pmatrix}$$

Vi går fram på samme måte for matrisen B, og finner

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siden $|B| = 1$, er B^{-1} gitt ved

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi sjekker at $AA^{-1} = I$ og at $BB^{-1} = I$ ved å multiplisere sammen matrisene, og ser at det stemmer.

3.16 Merk at

$$\begin{pmatrix} 5x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Det betyr at

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 &= 4 \end{aligned}$$

kan skrives om som

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Derfor har vi at

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Siden $|A| = 5(-1) - 2 \cdot 1 = -7 \neq 0$, så er A invertibel og

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}.$$

Multipliserer vi likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med A^{-1} fra venstre, får vi

$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Siden $A^{-1}A = I$ and $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$ får vi at $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Løsningen er dermed

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Altså er $x_1 = 1$ og $x_2 = -2$.

3.17 Vi reduserer i hvert tilfelle matrisen $(A|I)$ til en redusert trappeform $(I|A^{-1})$ ved å bruke elementære radoperasjoner. Vi kan deretter lese av A^{-1} fra den reduserte trappeformen. I det første tilfellet får vi

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ved å bytte om de to øverste radene. Det betyr at

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I de andre tilfellene finner vi på tilsvarende måte den inverse matrisen:

$$b)\ A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c)\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d)\ A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3.18 Vi regner ut determinanten til koeffisientmatrisen:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$$

Siden $|A| \neq 0$, så har det lineære systemet kun løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, og ingen ikke-trivielle løsninger.

3.19 Vi finner den reduserte trappeformen til koeffisientmatrisen til det lineære systemet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Altså er det en frihetsgrad, og vi kan bruke z som fri variabel, siden den tredje kolonnen er den eneste uten pivot. Likningene blir $x - 3z = 0$ og $y + 4z = 0$, så løsningene kan skrives som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z \\ -4z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det er uendelig mange løsninger og de ligger langs en rett linje utspent av vektoren $(3, -4, 1)$.

3.20 Vi regner ut determinanten til koeffisientmatrisen ved å utvikle langs andre rad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6s$$

For $s \neq 0$ så er $\det(A) \neq 0$, og systemet har kun den trivielle løsningen. For $s = 0$ har systemet ikke-trivielle løsninger siden $\det(A) = 0$. Vi finner antall frihetsgrader i dette tilfellet ved å finne en trappeform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at det er en frihetsgrad og at vi kan velge å bruke z som fri variabel når $s = 0$. Det er derfor et en-dimensjonalt rom (en linje) av løsninger i dette tilfellet.

Forelesning 4
Egenverdier og egenvektorer

4.1 Kort sammendrag

La A være en kvadratisk $n \times n$ matrise. En *egenverdi* for A er et tall λ slik at likningen

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

har ikke-trivielle løsninger $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (det vil si andre løsninger enn $\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Legg merke til at for ethvert tall λ er likningen ovenfor et $n \times n$ homogent lineært system med ukjent n-vektor $\mathbf{x}$, som kan skrives på formen

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Derfor er egenverdiene til A lik løsningene av den *karakteristiske likningen*

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

som er en likning av grad n med ukjent λ. Når A er en 2×2 matrise, så blir den karakteristiske likningen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Karakteristisk likning: } \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Vi kan skrive dette som $\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$, der $\operatorname{tr}(A)$ kalles sporet til A og er definert som summen av elementene på diagonalen i A. Når $n \geq 3$ kan det være vanskelig å løse den karakteristiske likningen siden den har grad minst tre.

Hvis λ er en egenverdi for A, så har det lineære systemet $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ minst en frihetsgrad, og løsningene av dette systemet kalles *egenvektorer* for A med egenverdi λ. Samlingen av disse egenvektorene kalles egenrommet E_λ og er et lineært underrom. For en gitt λ kan vi finne en basis for E_λ ved Gauss-eliminasjon. Antall frihetsgrader kan ikke være større enn multiplisiteten m til egenverdien λ.

Dersom en $n \times n$ matrise A har n egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (der vi tillatter at noen av egenverdiene er like; en egenverdi med multiplisitet m forekommer m ganger i listen), så har vi

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n, \quad \operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

En symmetrisk $n \times n$ matrise har alltid n egenverdier.

En $n \times n$ matrise A er *diagonaliserbar* om det finnes en invertibel matrise P slik at

$$P^{-1}AP = D$$

er en diagonal matrise. Dette er tilfellet hvis og bare hvis A har n egenverdier og n lineært uavhengige egenvektorer. I så fall er P en matrise med disse egenvektorene som kolonner, og D har egenverdiene på diagonalen. En symmetrisk matrise er alltid diagonaliserbar.

4.2 Oppgaver

4.1. Finn egenverdiene til disse matrisene:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

4.2. Finn egenverdiene til A, og bruk dem til å finne $\det(A)$ og $\operatorname{tr}(A)$ i hvert tilfelle:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad c)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

4.3. Finn alle egenvektorene til følgende matriser:

$$a)\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4. Finn alle egenvektorer for disse matrisene:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

4.5. Finn egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Finn alle egenvektorene til A når $s = 2$. Er A diagonaliserbar for $s = 2$?

4.6. Finn alle egenverdier og egenvektorer til matrisen

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bruk dette til å gi en geometrisk tolkning av lineærtransformasjonen gitt ved multiplikasjon med A.

4.7. En kvadratisk matrise $A = (a_{ij})$ slik at $a_{ij} = 0$ når $i > j$ (altså at den delen av matrisen som er under diagonalen er null) kalles *øvre triangulær*. Hva kan du si om egenverdiene til en øvre triangulær matrise?

4.3 Løsninger

4.1 a) Matrisen har karakteristisk likning $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, og egenverdier

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2 = 3, -1$$

b) Matrisen har karakteristisk likning $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, og egenverdier $\lambda = 1$ og $\lambda = 1$ (en dobbelrot).
c) Matrisen har karakteristisk likning $\lambda^2 - 9\lambda + 8 = 0$, og egenverdier

$$\lambda = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} = 8, 1$$

4.2 a) Matrisen har karakteristisk likning $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, og egenverdier

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Derfor er

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2 = \frac{9-5}{4} = 1, \quad \operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 3$$

b) Matrisen har karakteristisk likning $(-1-\lambda)(-2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$, og $\lambda_1 = \lambda_3 = -1$ og $\lambda_2 = -2$. Derfor er

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2, \quad \operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -4$$

c) Matrisen har karakteristisk likning

$$(4-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 14) = 0$$

og egenverdier $\lambda = 4$ og

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-56}}{2} = 4 \pm \sqrt{2}$$

Derfor er

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 4(16-2) = 56, \quad \mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4+8 = 12$$

4.3 a) Egenverdiene er $\lambda = -1$ og $\lambda = -2$ fra Oppgave 4.2. Egenvektorene for $\lambda = -1$ er gitt ved

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at x og z er frie variabler, og $y = 0$. Egenvektorene med $\lambda = -1$ er dermed

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Egenvektorene for $\lambda = -2$ er gitt ved

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi ser at y er en fri variabel, og $x = z = 0$. Egenvektorene med $\lambda = -2$ er dermed

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Egenverdiene er $\lambda = 7, 3, 1$ siden matrisen er øvre triangulær, og egenvektorene for $\lambda = 7$ er gitt ved matrisen

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 17 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Vi ser at x er en fri variabel, og at $y = z = 0$. Egenvektorene med $\lambda = 7$ er dermed

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Egenvektorene for $\lambda = 3$ er gitt ved matrisen

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}4 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 17\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Vi ser at y er en fri variabel, og at $x=-y$ og $z=0$. Egenvektorene med $\lambda=3$ er dermed

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}-y\\ y\\ 0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

Egenvektorene for $\lambda=1$ er gitt ved matrisen

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}6 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 17\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Vi ser at z er en fri variabel, at $y=-17z/2$ og at $x=35z/6$. Egenvektorene med $\lambda=1$ er dermed

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}35z/6\\ -17z/2\\ z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}35/6\\ -17/2\\ 1\end{pmatrix}$$

4.4 Egenverdiene i denne oppgaven har vi regnet ut i Oppgave 4.1. Egenvektorene i a) blir

$$\lambda=3:\ \mathbf{x}=y\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\quad \lambda=-1:\ \mathbf{x}=y\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

i b) blir det

$$\lambda=1:\ \mathbf{x}=x\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

og i c) blir det

$$\lambda=8:\ \mathbf{x}=y\begin{pmatrix}3/2\\ 1\end{pmatrix},\quad \lambda=1:\ \mathbf{x}=y\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$$

Vi har brukt Gauss-eliminasjon for å løse likningen $(A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ i hvert tilfelle.

4.5 Egenverdiene til matrisen er gitt ved karakteristisk likning

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 7 & -2\\ 0 & s-\lambda & 0\\ 1 & 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(s-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=0$$

som gir $\lambda=s$, $\lambda=2$ og $\lambda=3$. Når $s=2$ er egenverdiene $\lambda=2$ og $\lambda=3$. For $\lambda=2$ er egenvektorene gitt av matrisen

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}-1 & 7 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Vi ser at z er en fri variable, og at $y = 0$ og $x = -2z$. Dermed er egenvektorene med $\lambda = 2$ gitt ved

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

For $\lambda = 3$ er egenvektorene gitt av matrisen

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi ser at z er en fri variable, og at $y = 0$ og $x = -z$. Dermed er egenvektorene med $\lambda = 3$ gitt ved

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

For $s = 2$ har A tre egenverdier $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ og $\lambda_3 = 3$, men kun to lineært uavhengige egenvektorer. Derfor er A ikke diagonaliserbar.

4.6 Matrisen har karakteristisk likning $\lambda^2 - \lambda = 0$, og egenverdier $\lambda = 1$ og $\lambda = 0$. Egenvektorene er gitt ved

$$\lambda = 1: \; \mathbf{x} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 0: \; \mathbf{x} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det betyr at egenrommet E_1 er linjen $y = -x$, og $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ når $\mathbf{x}$ ligger langs denne linjen. Egenrommet E_0 er linjen $y = x$, og $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ når $\mathbf{x}$ ligger langs denne linjen. Den geometriske tolkningen av T er derfor at det er projeksjon ned på linjen $y = x$.

4.7 Hvis A er øvre triangulær med $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ på diagonalen, så er $A - \lambda I$ øvre triangulær med $a_{11} - \lambda, a_{22} - \lambda, \ldots, a_{nn} - \lambda$ på diagonalen. Siden determinanten til en øvre triangulær matrise er produktet av elementene på diagonalen, så blir den karakteristiske likningen

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda) = 0$$

Dermed er egenverdiene til A lik elementene tallene $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ på diagonalen til A.

Forelesning 5
Kvadratiske former

5.1 Kort sammendrag

Samlingen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ av vektorer er en *ortogonal mengde* dersom vektorene er parvis ortogonale. Det vil si at $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j$ når $i \neq j$. Samlingen av vektorer kalles en *ortonormal mengde* hvis det i tillegg er slik at alle vektorene har lengde $||\mathbf{v}_i|| = 1$. En ortonormal mengde som består av n vektorer i $\mathbb{R}^n$ er en basis for $\mathbb{R}^n$.

En *ortogonal matrise* er en invertibel matrise P slik at $P^{-1} = P^T$. For en kvadratisk matrise gjelder det at matrisen er ortogonal hvis og bare hvis kolonnevektorene i matrisen danner en ortonormal mengde.

Vi sier at en matrise A er *ortogonalt diagonaliserbar* hvis det finnes en ortogonal matrise P slik $P^T AP = P^{-1}AP = D$ er diagonal. Et viktig resultat sier at en matrise er ortogonalt diagonaliserbar hvis og bare hvis den er symmetrisk, og i så fall er en samling av egenvektorer med ulike egenverdier alltid en ortogonal mengde.

En kvadratisk form i n variable $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ er et polynom som kan skrives som en sum av ledd av grad to. Vi kan ved hjelp av vektorer skrive en kvadratisk form Q som

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\, A\, \mathbf{x}, \quad \text{der } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matrisen A kan velges til å være en symmetrisk $n \times n$-matrise, og den er da entydig bestemt av den kvadratiske formen.

Vi definerer definittheten til en kvadratisk form $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ på følgende måte: Formen Q, og den kvadratiske matrisen A, kalles

- *positiv semidefinitt* dersom $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ for alle $\mathbf{x}$
- *negativ semidefinitt* dersom $Q(\mathbf{x}) \leq 0$ for alle $\mathbf{x}$
- *indefinitt* dersom $Q(\mathbf{x})$ kan ta både positive og negative verdier

Det er klart at $Q(\mathbf{0}) = 0$ når Q er en hvilken som helst kvadratisk form, og det gir følgende spesialtilfeller: Vi sier at formen Q er

- *positiv definitt* dersom $Q(\mathbf{x}) > 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- *negativ definitt* dersom $Q(\mathbf{x}) > 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Teorem 5.1. *La Q være en kvadratisk form med symmetrisk $n \times n$-matrise A, som har n egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Da har vi at*

- *Q er* positiv semidefinitt *hvis og bare hvis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$*
- *Q er* negativ semidefinitt *hvis og bare hvis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \leq 0$*
- *Q er* indefinitt *hvis og bare hvis A har både positive og negative egenverdier*

og at

- *Q er* positiv definitt *hvis og bare hvis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$*
- *Q er* negativ definitt *hvis og bare hvis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n < 0$*

Vi kan forklare dette resultatet på følgende måte: Siden A er symmetrisk, er den ortogonalt diagonaliserbar. Om vi gjør koordinatskiftet $\mathbf{x} = P \cdot \mathbf{u}$, der P er en ortogonal matrise slik at $P^T AP = D$ er diagonal, kan den kvadratiske formen skrives som

$$Q = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \cdots + \lambda_n u_n^2$$

i koordinatene $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

5.2 Oppgaver

5.1. Vis at en ortonormal mengde $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ av n-vektorer er en basis for $\mathbb{R}^n$.

5.2. Finn en ortogonal diagonalsering av den symmetriske matrisen til den kvadratiske formen $Q(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$.

5.3. Skriv ned et uttrykk for funksjonen $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ i hvert tilfelle:

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad c) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

5.4. Finn i hvert tilfelle den symmetriske matrisen A slik at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

1. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$
2. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3 - x_3^2$

5.5. Klassifiser de kvadratiske formene som positivt semidefinitt, negativt semidefinitt eller indefinitt:

1. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2$
2. $Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 4x_2^2$
3. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - x_2^2$
4. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + x_3^2$

5.6. Gjør om den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = 4x_1x_2$ til en kvadratisk form i de nye variablene u og v ved å gjøre variabelskiftet $u = x_1 + x_2$ og $v = x_1 - x_2$. Er Q positivt semidefinitt, negativt semidefinitt eller indefinitt?

5.7. Avgjør om den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ er positiv (semi)definitt eller negativ (semi)definitt i hvert tilfelle:

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad c) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

5.8. Klassifiser hver av de kvadratiske formene som positiv (semi)definitt, negativ (semi)definitt eller indefinitt:

1. $Q(x_1,x_2) = x_1x_2$
2. $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 + 3x_3^2$
3. $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1x_3 - x_2^2$

5.9. La A være en symmetrisk 2×2-matrise.

1. Vis at A er positiv definitt hvis og bare hvis $\det(A) > 0$ og $\mathrm{tr}(A) > 0$.
2. Vis at A er indefinitt hvis og bare hvis $\det(A) < 0$.

5.10. La A være en (ikke nødvendigvis kvadratisk) matrise, og la $B = A^T A$. Vis at B er en kvadratisk, symmetrisk og positiv semidefinitt matrise. Vis også at hvis A er en kvadratisk invertibel matrise, så er B positiv definitt.

5.3 Løsninger

5.1 Siden $n\times n$-matrisen A med vektorene som kolonner, gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

er en ortogonal matrise, så er $A^{-1} = A^T$. Det betyr spesielt at $\det(A) \neq 0$, og dermed at likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun har den trivielle løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, og kolonnevektorene er derfor lineært uavhengige. Dessuten har det lineære systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en entydig løsning for alle verdier av $\mathbf{b}$. Det betyr at alle n-vektorer $\mathbf{b}$ er i $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$. Derfor er $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n) = \mathbb{R}^n$, og $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$.

5.2 Den symmetriske matrisen til den kvadratiske formen $Q(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$ er

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Den har karakteristisk likning $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ siden A har $\mathrm{tr}(A) = 1 + 1 = 2$ og $|A| = 1 - 4 = -3$. Likningen kan skrives $(\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$, og dermed har A to ulike egenverdier $\lambda = -1$ og $\lambda = 3$. Vi finner en basis $\{\mathbf{v}_i\}$ for hver av egenrommene ved å løse det lineære systemet $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi vet fra teori at de to basisvektorene er ortogonale siden de har ulike egenverdier. Siden basisvektorene begge har lengde $||\mathbf{v}_i|| = \sqrt{2}$, finner vi en ortonormal basis av egenvektorer ved å dividere hver av vektoren på $\sqrt{2}$. Vi får dermed en ortogonal diagonalisering $P^T AP = D$ med

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5.3 De kvadratiske formene er
$a)$ $-x^2 - 2y^2 - z^2$ $\quad b)$ $x^2 + 2xy + 2y^2$ $\quad c)$ $3x^2 + 2xz + 4y^2 + 5z^2$

5.4 De symmetriske matrisene er

$$a) \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5.5 Siden de tre første kvadratiske formene kun har kvadratledd, kan vi avgjøre definittheten ved å se på fortegnet til koeffisientene, og finner at de er:
$a)$ positiv definitt $\quad b)$ negativ definitt $\quad c)$ indefinitt
Den siste kvadratiske formen har kryssledd, og vi finner derfor egenverdiene til den symmetriske matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{gir karakteristisk likning} \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dette gir $(1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$, og dermed egenverdier $\lambda = 1$, $\lambda = 4$ og $\lambda = -1$. Dermed finner vi at den er:
$d)$ indefinitt

5.6 Siden $u^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ og $v^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, så er

$$u^2 - v^2 = 4x_1x_2 \quad \Rightarrow \quad Q = 4x_1x_2 = u^2 - v^2$$

Dermed ser vi at Q er indefinitt.

5.7 Klassifikasjon av de kvadratiske formene:
a) Vi ser direkte at den kvadratiske formen er negativ definitt.

b) Vi finner egenverdiene til den symmetriske matrisen:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Dette gir to positive egenverdier siden $\sqrt{5} < 3$, og den kvadratiske formen er postiv definitt.
c) Vi finner egenverdiene til den symmetriske matrisen:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 14) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4,\ \lambda = \frac{8 \pm \sqrt{8}}{2}$$

Dette gir tre positive egenverdier siden $\sqrt{8} < 8$, og den kvadratiske formen er postiv definitt.

5.8 Klassifikasjon av de kvadratiske formene:
a) Vi finner egenverdiene til den symmetriske matrisen:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1/4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

Den kvadratiske formen er derfor indefinitt.
b) Vi finner egenverdiene til den symmetriske matrisen:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3,\ \lambda = \pm\sqrt{5}$$

Den kvadratiske formen er derfor indefinitt.
c) Vi finner egenverdiene til den symmetriske matrisen:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1/2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1/2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 1/4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1,\ \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

Den kvadratiske formen er derfor indefinitt.

5.9 En symmetrisk 2×2-matrise A har to egenverdier λ_1, λ_2 slik at $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ og $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$. Dermed har vi:
a) Matrisen er positiv definitt hvis og bare hvis $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, og dette intreffer hvis og bare hvis $\mathrm{tr}(A) > 0$ og $\det(A) > 0$.
b) Matrisen er indefinitt hvis og bare hvis λ_1 og λ_2 har motsatte fortegn, og dette intreffer hvis og bare hvis $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 < 0$.

5.10 La A være en $m \times n$-matrise. Da er A^T en $n \times m$-matrise, og $B = A^T A$ er en $n \times n$-matrise (altså en kvadratisk matrise). Siden

$$B^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = B$$

så er B også symmetrisk. Den kvadratiske formen med symmetrisk matrise B kan skrives som

$$\mathbf{x}^T B\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T (A\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{x}) = ||A\mathbf{x}||^2 \geq 0$$

for alle $\mathbf{x}$, og dermed er B også positiv semidefinitt. Matrisen B har egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ siden B er symmetrisk og positiv semidefinitt, og $|B| = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$. Dermed ser vi at $|B| \neq 0$ betyr at $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. Hvis B er invertibel er den derfor positiv definitt.

Forelesning 6
Optimering

6.1 Kort sammendrag

Når f er en funksjon i n variabler, kan vi skrive funksjonsuttrykket litt kortere som $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x})$ ved å representerer et punkt $(x_1, \ldots, x_n)$ som en n-vektor $\mathbf{x}$ der komponentene svarer til koordinatene til punktet.

Dette er spesielt nyttig når funksjonsuttrykket til f kan skrives på *matriseform* ved hjelp av vektorer og matriser. Når vi skriver $f(\mathbf{x})$ på matriseform, kan vi representere de partielle deriverte til f som en kolonnevektor ved å bruke skrivemåtene

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f'_{x_1}(\mathbf{x}) \\ f'_{x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f'_{x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \qquad \text{eller} \qquad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} f'_{x_1}(\mathbf{x}) \\ f'_{x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f'_{x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Et stasjonært punkt for f er et punkt slik at $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Stasjonære punkt er kandidater for maksimums- og minimumspunkter for f, og for mange funksjoner (inkludert alle polynomfunksjoner) er dette de eneste kandidatpunktene.

Anta at f er en annengradsfunksjon. Da kan funksjonsuttrykket til f skrives på formen $f(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}) + L(\mathbf{x}) + C$, der $Q(\mathbf{x})$ består av alle ledd av grad to, $L(\mathbf{x})$ består av alle ledd av grad én, og C er en konstant. Om f er en polynomfunksjon av lavere grad enn to, så gjelder det samme, med $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Vi kaller Q den kvadratiske formen og L den lineære formen til f. Funksjonsuttrykket kan skrives på vektorform som

$$f(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}) + L(\mathbf{x}) + C = \mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} + B \cdot \mathbf{x} + C = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + B\mathbf{x} + C$$

der A er den symmetriske matrisen til den kvadratiske formen, B er en $1 \times n$-matrise slik at $L(\mathbf{x}) = B \cdot \mathbf{x}$, og C er en konstant. Da er

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = 2A \cdot \mathbf{x} + B^T = 2A\mathbf{x} + B^T$$

Dessuten er f konveks hvis og bare hvis A er positiv semidefinitt, og f er konkav hvis og bare hvis A er negativ semidefinitt. Hvis f er konveks (konkav), er alle stasjonære punkter for f globale minima (globale maksima) for f. Om A er indefinit, er alle stasjonære punkter for f sadelpunkter.

6.2 Oppgaver

6.1. Finn $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ når f er funksjonen gitt ved $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2 + x_3^2$.

6.2. Skriv den kvadratiske formen f på matriseform og finn $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ når

1. $f(x_1,x_2) = x_1^2 + 16x_1x_2 + x_2^2$
2. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2$

6.3. Skriv funksjonen f på formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$ og finn de stasjonære punktene. Er de stasjonære punktene maksimum- eller minimumspunkter?

1. $f(x_1,x_2) = x_1^2 + 16x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 + 2x_2 + 3$
2. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2 - x_1$

6.4. Vis at når $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ er en kvadratisk form med symmetrisk matrise A, så gjelder regneregelen $\mathbf{Q}'(\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x}$ ved å gjennomføre stegene nedenfor:

1. Vis at $\partial Q/\partial x_1 = \mathbf{e}_1^T A\mathbf{x} + (\mathbf{x}^T A)\mathbf{e}_1$, der $\mathbf{e}_1$ er kolonnevektoren som har 1 på første plass og 0 ellers.
2. Vis at $(\mathbf{x}^T A)\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^T A^T\mathbf{x}$ og konkluder at $\partial Q/\partial x_1 = \mathbf{e}_1^T(A+A^T)\mathbf{x}$.
3. Forklar at $\partial Q/\partial x_i = \mathbf{e}_i^T(A+A^T)\mathbf{x}$ der $\mathbf{e}_i$ er kolonnevektoren som har 1 på i'te plass og 0 ellers.
4. Vis at $\mathbf{Q}'(\mathbf{x}) = (A+A^T)\mathbf{x} = 2A\,\mathbf{x}$

6.5. Vis at den deriverte til en lineær form $L = B\mathbf{x}$ er gitt ved $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = B^T$.

6.6. En symmetrisk 2×2-matrise H kan skrives på formen

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Bestem hvilke betingelser A, B og C må oppfylle for at matrisen H skal være
(i) positiv semidefinit, (ii) negativ semidefinit, og (iii) indefinit.

6.7. Vi ser på den kvadratiske formen $Q(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 17x_3^2$. Finn den symmetriske matrisen A som svarer til denne kvadratiske formen, og en ortogonal diagonalisering av A. Bruk dette til å finne nye variable u_1,u_2,u_3 slik at den kvadratiske formen kan skrives som

$$Q = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \lambda_3 u_3^2$$

og klassifiser den kvadratiske formen.

6.8. Gitt et datasett med N observasjoner av variabelen y som skal forklares og av de n forklaringsvariable $x_1, x_2, \dots, x_n$, så ønsker vi å finne den lineære likningen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

som gir beste tilnærming til dataene i datasettet. Vi kan sjelden finne en tilnærming uten feil, og må derfor istedet å gjøre feilen ε gitt ved

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n + \varepsilon$$

minst mulig. Vi antar at datasettet er gitt ved følgende tabell (der hver linje svarer til en observasjon):

	x_1	x_2	$\dots$	x_n	y
1	x_{11}	x_{21}	$\dots$	x_{n1}	y_1
2	x_{12}	x_{22}	$\dots$	x_{n2}	y_2
3	x_{13}	x_{23}	$\dots$	x_{n3}	y_3
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
N	x_{1N}	x_{2N}	$\dots$	x_{nN}	y_N

Vi får det lineært likningssystem $\mathbf{y} = X\beta + \varepsilon$ der

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{nN} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{pmatrix}$$

Vi sier at feilen er minst mulig når $||\varepsilon||^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_N^2$ er minst mulig, og metoden kalles derfor *minste kvadraters metode*. Vis at problemet har entydig løsning

$$\beta = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \mathbf{y}$$

når $\det(X^T X) \neq 0$.

6.9. Estimer β_0, β_1 i den lineære regresjonsmodellen $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ ut fra de tre observasjonene

$$(x_1, y_1) = (0,1)$$
$$(x_2, y_2) = (1,0)$$
$$(x_3, y_3) = (1,1)$$

og beregn feilleddene e_1, e_2 og e_3.

6.3 Løsninger

6.1 Vi har at

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 1 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

6.2 Vi har at $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ og at $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = 2A\,\mathbf{x}$ i hvert tilfelle. Det gir i a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 16 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

og i b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

6.3 Hver av annengradsfunksjonene kan skrives på formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$ ved at vi i a) velger

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = 3$$

og i b) velger

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = 0$$

I a) finner vi de stasjonære punktene ved å løse likningen $2A\mathbf{x} = -B^T$:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x} + B^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 16 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Siden $|A| = 4 - 256 < 0$, så har det lineære systemet en entydig løsning som er et sadelpunkt. Det stasjonære punktet kan vi finne ved hjelp av Gauss eliminasjon, og det er $(x,y) = (-13/126, -22/126)$.
I b) finner vi de stasjonære punktene ved å løse likningen $2A\mathbf{x} = -B^T$:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x} + B^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi finner egenverdiene til A, som er $\lambda = -1$ og $\lambda = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Dermed er $|A| \neq 0$, og det lineære likningssystemet har en entydig løsning. Dette punktet er et sadelpunkt siden A er indefinitt, og vi kan finne punktet ved Gauss eliminasjon. Vi finner at $(x,y,z) = (0,1/2,0)$.

6.4 Vi kan skrive Q som en sum

$$Q = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$$

og da følger det at

$$\frac{\partial Q}{\partial x_p} = \sum_{p,j} a_{pj}x_j + \sum_{i,p} a_{ip}x_i = \mathbf{e}_p^T A\mathbf{x} + \mathbf{x}^T A\mathbf{e}_p$$

for $p = 1, 2, \ldots, n$. Bytter vi ut symbolet p med i får vi formelen

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i^T A\mathbf{x} + \mathbf{x}^T A\mathbf{e}_i$$

Legg merke til at $\mathbf{x}^T A\mathbf{e}_i$ er en 1×1-matrise, og den er derfor symmetrisk. Det betyr at

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{e}_i = (\mathbf{x}^T A\mathbf{e}_i)^T = \mathbf{e}_i^T A^T\mathbf{x}$$

Dermed er $\partial Q/\partial x_i = \mathbf{e}_i^T (A + A^T)\mathbf{x}$ for $i = 1,2,\ldots,n$. Siden vi har

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \partial Q/\partial x_1 \\ \partial Q/\partial x_2 \\ \vdots \\ \partial Q/\partial x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T (A + A^T)\mathbf{x} \\ \mathbf{e}_2^T (A + A^T)\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^T (A + A^T)\mathbf{x} \end{pmatrix}$$

så betyr det at $\partial Q/\partial \mathbf{x} = (A + A^T)\mathbf{x} = 2A\mathbf{x}$.

6.5 Hvis $L = B\mathbf{x}$ er en lineær form definert av matrisen

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$$

så er $L = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n$, og har derivert

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = B^T$$

6.6 Siden matrisen er symmetrisk, vet vi at den har to egenverdier λ_1, λ_2, og de må oppfylle $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} H = A + C$, og $\lambda_1\lambda_2 = \det H = AC - B^2$. Dermed har vi at H er indefinit hvis og bare hvis $AC - B^2 < 0$, siden dette er det eneste tilfellet hvor de to egenverdiene har motsatte fortegn. Hvis $AC - B^2 \geq 0$, så er enten $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ eller $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$. Da vil $A + C \geq 0$ i det første tilfellet, som gir H positiv semidefinit, og $A + C \leq 0$ i det andre tilfellet, som gir H negativ semidefinit. Vi oppsummerer:

1. H positiv semidefinit når $AC - B^2 \geq 0$ og $A + C \geq 0$
2. H negativ semidefinit når $AC - B^2 \geq 0$ og $A + C \leq 0$
3. H indefinit når $AC - B^2 < 0$

6.7 Den kvadratiske formen har symmetrisk matrise A med egenverdier gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 17 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 17-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dette gir $(3-\lambda)(\lambda^2 - 19\lambda + 18) = 0$, med løsninger $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ og $\lambda_3 = 18$. Vi finner egenvektorene til A. For $\lambda = 3$ får vi

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 14 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

For $\lambda = 1$ får vi

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

For $\lambda = 18$ får vi

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 0 & -15 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} z/4 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ved å velge egenvektorene slik vi har gjort ovenfor, blir $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ en ortonormal basis av egenvektorer. Vi setter $\mathbf{x} = P\mathbf{u}$, eller $\mathbf{u} = P^T\mathbf{x}$, der P er matrisen med vektorene i $\mathscr{B}$ som kolonner:

$$P = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ \sqrt{17} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Da er den kvadratiske formen gitt ved $Q = 3u_1^2 + u_2^2 + 18u_3^2$, med

$$\begin{aligned} u_1 &= x_2 \\ u_2 &= \frac{x_3 - 4x_1}{\sqrt{17}} \\ u_3 &= \frac{4x_3 + x_1}{\sqrt{17}} \end{aligned}$$

Den kvadratiske formen er positiv definitt.

6.8 Vi har at feilleddet $||\varepsilon||^2$ kan skrives på matriseform som

$$||\varepsilon||^2 = \begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_N\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N\end{pmatrix} = \varepsilon^T \cdot \varepsilon$$

Bruker vi at $\mathbf{y} = X\beta + \varepsilon$, eller $\varepsilon = \mathbf{y} - X\beta$, får vi at feilleddet kan skrives som en funksjon av β der X og $\mathbf{y}$ er gitte matriser og vektorer:

$$f(\beta) = ||\varepsilon||^2 = (\mathbf{y} - X\beta)^T(\mathbf{y} - X\beta)$$

Dermed blir problemet å finne β som minimerer $f(\beta)$. Vi regner litt på denne funksjonen for å skrive den på en enklere form:

$$\begin{aligned} f(\beta) &= (\mathbf{y} - X\beta)^T(\mathbf{y} - X\beta) = (\mathbf{y}^T - \beta^T X^T)(\mathbf{y} - X\beta) \\ &= \mathbf{y}^T\mathbf{y} - \beta^T X^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T X\beta + \beta^T X^T X\beta \\ &= \beta^T(X^T X)\beta - 2\mathbf{y}^T X\beta + \mathbf{y}^T\mathbf{y} = \beta^T A\beta + B\beta + C \end{aligned}$$

der $A = X^T X$, $B = -2\mathbf{y}^T X$, og $C = \mathbf{y}^T\mathbf{y}$. Vi har brukt at $\beta^T X^T \mathbf{y}$ er en 1×1-matrise, og derfor er $\beta^T X^T \mathbf{y} = (\beta^T X^T \mathbf{y})^T = \mathbf{y}^T X\beta$. Likningen for å finne de stasjonære punktene for f blir dermed gitt ved

$$2A\beta + B^T = 2(X^T X)\beta - 2(\mathbf{y}^T X)^T = 2(X^T X)\beta - 2X^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

Dette gir $(X^T X)\beta = X^T\mathbf{y}$, og dermed er det eneste stasjonære punktet gitt ved

$$\beta = (X^T X)^{-1} \cdot X^T\mathbf{y}$$

når $\det(X^T X) \neq 0$. Dessuten er dette punktet et minimumspunktet for f hvis f er konveks. I oppgave 5.10 viste vi at $X^T X$ alltid er positiv semidefinit, og dermed er f alltid konveks.

6.9 Med utgangspunkt i de tre datapunktene definerer vi X og $\mathbf{y}$ ved

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi regner ut $X^T X$ og $X^T\mathbf{y}$, og finner at

$$X^T X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X^T\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi ser at $\det(X^T X) = 2 \neq 0$, så beste tilpasning er gitt ved

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1}(X^T\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Altså er den beste tilpasningen $y = 1 - x/2$. Det gir feilleddene

$$\varepsilon = \mathbf{y} - X\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$