Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Tre fanger A, B og C blir informert om at en av dem er valgt ut tilfeldig for å bli henrettet, mens de to andre blir satt fri. Fange A spør vokteren om han ikke i hemmelighet kan fortelle hvem av medfangene som skal slippes fri, siden han allerede vet at en av disse skal settes fri. Vokteren nekter å svare fordi han mener at når A vet hvem av kameratene som blir satt fri, vil hans egen sjanse for å bli henrettet øke fra 1/3 til 1/2 fordi A nå er en blant to fanger hvorav en skal bli henrettet. Hva mener du om vokterens argumentasjon?

Oppgave 2.
Du får sjansen til å delta i et spill der det kastes mynt og kron med en fair mynt, helt til man slår kron første gang. Gevinsten er 2 kr om man slår kron i første kast, 4 kr om man slår kron i andre kast, 8 kr om man slår kron i tredje kast, og mer generelt, 2^i kr om man slår kron i i'te kast.

a. Hvor mye ville du være villig til å betale for å delta i dette spillet?

b. Vi antar så at motspilleren ikke ville være i stand til å betale ut gevinster over 10.000 kr. Hvor mye er du villig til å betale for å delta nå?

Oppgave 3.
Du kaster en fair mynt til du får kron første gang, og X er antall kast inntil du får kron (inkludert kastet da du får kron). Finn $X(S)$, de mulige verdiene for X, og lag en tabell som viser verdien x, sannsynligheten $f(x) = p(X = x)$, og den kummulative sannsynligheten $F(x) = p(X \leq x)$ for de fem første verdiene i $X(S)$.

Oppgave 4.
La X være den stokastiske variabelen i Oppgave 3. Bruk verdiene $F(x)$ i tabellen du fant til å regne ut:

a) $p(X > 2)$ b) $p(X \geq 2)$ c) $p(3 < X \leq 5)$ d) $p(3 \leq X \leq 5)$ e) $p(X > 5)$

Oppgave 5.
Vi kaster en blå og en rød terning, og lar X være antall øyne på blå terning minus antall øyne på rød terning. Finn $X(S)$, de mulige verdiene for X, og lag en tabell som viser verdien x, sannsynligheten $f(x) = p(X = x)$, og den kummulative sannsynligheten $F(x) = p(X \leq x)$ for alle verdiene i $X(S)$.

Oppgave 6.
La X være den stokastiske variabelen i Oppgave 5. Regn ut:

a) $E(X)$ b) $E(X^2)$ c) $\text{Var}(X)$ d) $E(X + 1)$ e) $\text{Var}(X + 1)$

Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
https://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1190/

Oppgave 7.
En flervalgseksamen har 15 spørsmål, og hvert spørsmål inneholder et riktig altenativ (som gir 3 p) og tre gale alternativer (som gir -1 p). Vi antar at man svarer på alle spørsmål. Vi lar X være antall poeng på flervalgseksamen når svarene er valgt tilfeldig.

a. Forklar at $X = 4R - 15$, der R er antall rette svar. Hvilken fordeling har R?

b. Hva er forventningen og standardavviket til X?

c. Finn $p(X \geq 37)$ og $p(X < 9)$, som er sannsynligheten for å få A og for å stryke.

Vi antar nå at en student er i stand til å eliminere et svaralternativ på hvert spørsmål, og velger tilfeldig et av de tre andre alternativene. Vi lar Y være antall poeng på flervalgseksamen under denne forutsetningen.

d. Hva er forventningen og standardavviket til Y?

e. Finn $p(Y \geq 37)$ og $p(Y < 9)$?

Til slutt antar vi at en student er i stand til å eliminere to svaralternativer på hvert spørsmål, og velger tilfeldig et av de to andre alternativene. Vi lar Z være antall poeng på flervalgseksamen under denne forutsetningen.

f. Hva er forventningen og standardavviket til Z?

g. Finn $p(Z \geq 37)$ og $p(Z < 9)$?

Oppgave 8.
La X være den stokastiske variabelen i Oppgave 3. Regn ut $E(X)$.

Oppgave 9.
Du betaler 13 kr for å delta i et spill der det kastet mynt og kron med en fair mynt, helt til man slår kron første gang, og man får utbetalt 2^i kr om man slår kron i i'te kast dersom dette gir under 10.000 kr i utbetaling. Finn forventningsverdi og standardavvik til nettogevinsten.

Oppgave 10.
Vis at $E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$ og at $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \cdot \mathrm{Var}(X)$ når a og b er konstanter.

Oppgave 11.
Vis at $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ for enhver diskret stokastisk variabel X.

Oppgave 12.
Oppgaver fra læreboken [L]: 4.4, 4.5, 4.7, 5.1, 5.3, 5.7

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Sannsynligheten er fortsatt 1/3 og argumentet er ikke riktig.

x	$f(x)$	$F(x)$
1	1/2	1/2
2	1/4	3/4
3	1/8	7/8
4	1/16	15/16
5	1/32	31/32
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabell 1: Oppgave 3

Oppgave 2.
a) Uten begrensninger i gevinststørrelsen er forventet gevinst uendelig stor. b) Med begrensningen er forventet gevinst 13 kr.

Oppgave 3.
$X(S) = \{1, 2, 3, \dots\}$ og tabellen over sannsynligheter og kummutalative sannsynligheter er gitt i Tabell 1.

Oppgave 4.

a) $1 - F(2) = 1/4$ b) $1 - F(1) = 1/2$ c) $F(5) - F(3) = 3/32$ d) $F(5) - F(2) = 7/32$

e) $1 - F(5) = 1/32$

Oppgave 5.
$X(S) = \{-5, -4, \dots, -1, 0, 1, \dots, 4{,}5\}$ og tabellen over sannsynligheter og kummutalative sannsynligheter er gitt i Tabell 2.

x	$f(x)$	$F(x)$
-5	1/36	1/36
-4	2/36	3/36
-3	3/36	6/36
-2	4/36	10/36
-1	5/36	15/36
0	6/36	21/36
1	5/36	26/36
2	4/36	30/36
3	3/36	33/36
4	2/36	35/36
5	1/36	36/36

Tabell 2: Oppgave 5

Oppgave 6.

a) $E(X) = 0$ b) $E(X^2) = 210/36 \approx 5.83$ c) $\mathrm{Var}(X) = 210/36 \approx 5.83$

d) $E(X + 1) = 1$ e) $\mathrm{Var}(X + 1) = 210/36 \approx 5.83$

Oppgave 7.

a. R er binomisk fordelt med $n = 15$ og $p = 1/4$.

b. $E(X) = 0$ og $\sqrt{\operatorname{Var} X} = \sqrt{45} \approx 6.71$.

c. $p(X \geq 37) = 0.00000092$ og $p(Y < 9) = 0.85$

d. $E(Y) = 5$ og $\sqrt{\operatorname{Var} Y} = \sqrt{160/3} \approx 7.30$.

e. $p(Y \geq 37) = 0.000031$ og $p(Y < 9) = 0.62$

f. $E(Z) = 15$ og $\sqrt{\operatorname{Var} Z} = \sqrt{60} \approx 7.75$.

g. $p(Z \geq 37) = 0.0037$ og $p(Z < 9) = 0.15$

Oppgave 8.
$E(X) = 2$

Oppgave 9.
$E(X) = 0$ og $\sqrt{\operatorname{Var}(X)} = \sqrt{16213} \approx 127$ når X er nettogevinst