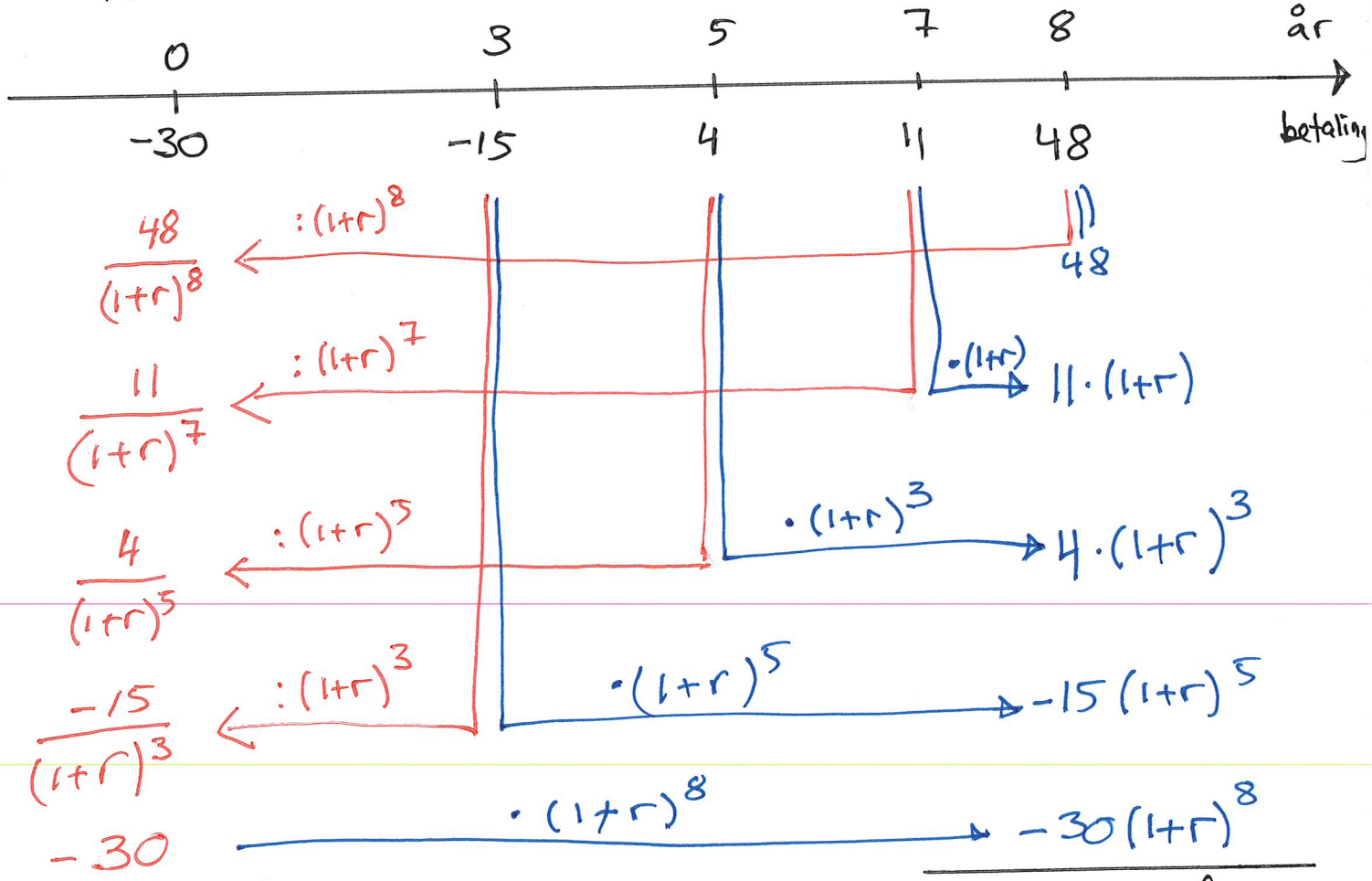
MET 1183, forelesning 3, 25. aug. 2026, Runar Ile

Plan 1. Rep: Nåverdien av en kontantstrøm
2. Geometriske rekker
3. Annuiteter

1. Rep: Nåverdien av en kontantstrøm

Oppg 3 La r være diskonteringsrenten.

Kontantstrømmen:



K_0 = Sum = nåverdien til kontantstrømmen m. renter

K_8 = Sum = fremtidsverdien av kontantstrømmen om 8 år med renter

b) $r = 9\%$, sier nåverdien $-8{,}88$

a) $r = 9\%$ gir fremtidsverds $-17{,}69$

d) $r = 13\%$, sier nåverdien $-15{,}49$

c) $r = 13\%$ gir fremtidsverdi $-41{,}19$

Observasjon

vekstfaktor for 8 år med $r = 9\%$

$-8{,}88 \cdot (1+9\%)^8 \overset{\text{regner}}{=} -17{,}69 = K_8$

$-15{,}49 \cdot (1+13\%)^8 \overset{\text{regner}}{=} 41.18 \approx K_8$

K_0 = $-15{,}49$

vekstfaktor for 8 år med $r = 13\%$

Forklaring vi regner ut

$$K_0 \cdot (1+r)^8 = \left[-30 - \frac{15}{(1+r)^3} + \frac{4}{(1+r)^5} + \frac{11}{(1+r)^7} + \frac{48}{(1+r)^8}\right] \cdot (1+r)^8$$

$$= -30 \cdot (1+r)^8 - 15 \cdot (1+r)^5 + 4 \cdot (1+r)^3 + 11 \cdot (1+r) + 48$$

$= K_8$ (fremtidsverdien om 8 år)

~~opg~~ Hvordan må utbetalingen i dag (−30) endres slik at internrenten til den nye kontantstrømmen blir

i) 9 % Bet. i dag: $-30 + 8{,}88 = \underline{\underline{-21{,}12}}$

ii) 13 % — " — : $-30 + 15{,}49 = \underline{\underline{-14{,}51}}$

Hvordan må betalingen om 8 år (48) endres slik at fremtidsverdien om 8 år blir 0 hvis renten er

iii) 9 %? $48 + 17{,}88 = \underline{\underline{65{,}69}}$

iv) 13 %? $48 + 41{,}19 = \underline{\underline{89{,}19}}$

2. Geometriske rekker

En rekke er en (lang) sum av tall.

Eks (ikke geom.) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{100}$ er en rekke med 10 ledd. Vi skriver

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$$

Geometriske rekker: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ der hvert ledd er k ganger det foregående leddet (k er et fast tall)

$$a_2 = k \cdot a_1$$
$$a_3 = k \cdot a_2 = k \cdot (k \cdot a_1) = k^2 \cdot a_1$$
$$a_4 = k \cdot a_3 = k \cdot k^2 \cdot a_1 = k^3 \cdot a_1$$
$$\vdots$$
$$a_n = k^{n-1} \cdot a_1$$

Vi kan finne et (kort) uttrykk for denne summen:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 + ka_1 + k^2 \cdot a_1 + k^3 \cdot a_1 + \ldots + k^{n-1} \cdot a_1$$
$$= a_1 \underbrace{(1 + k + k^2 + k^3 + \ldots + k^{n-1})}_{\frac{k^n - 1}{k - 1}}$$

antall ledd: n

$$= a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

a_1: det første leddet

k: „multiplikator" (vekstfaktor)

Oppg Beregn summen

$$5 + 5\cdot 1{,}003 + 5\cdot 1{,}003^2 + 5\cdot 1{,}003^3 + \ldots + 5\cdot 1{,}003^{61}$$

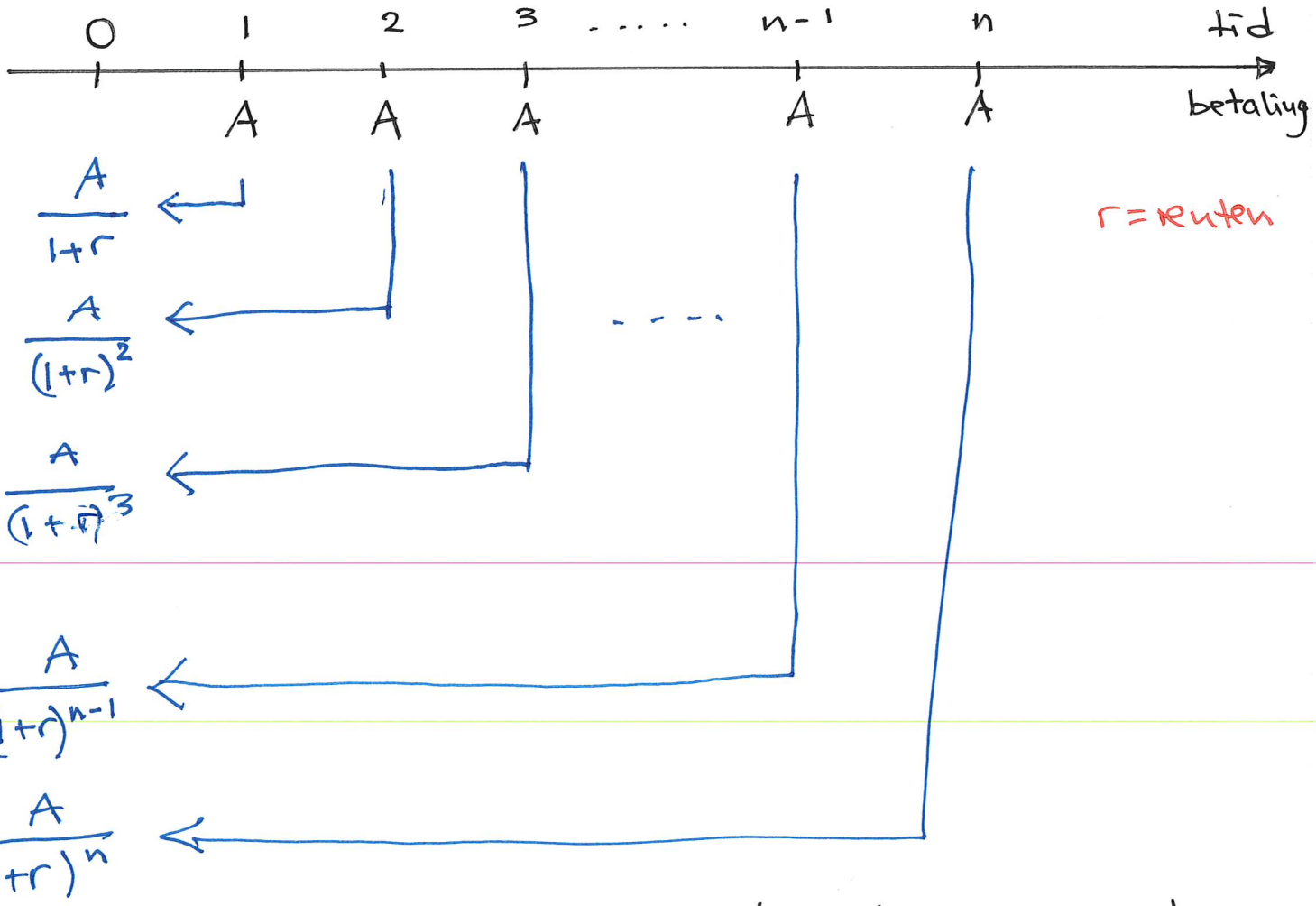
Løsning Dette er en geometrisk rekke med

$a_1 = 5$, $k = 1{,}003$, og antall ledd $n = 61$

Da er summen $5 \cdot \dfrac{1{,}003^{61} - 1}{0{,}003} = \underline{334{,}14}$

---

3. Annuiteter – jevne (regulære) kontantstrømmer



Summen er nåverdien til denne regulære kontantstrømmen. Dette er en geometrisk rekke med

$$a_1 = \frac{A}{1+r}, \quad k = \frac{1}{1+r}, \quad \text{antall ledd} = n$$

Da er summen $\dfrac{A}{1+r} \cdot \dfrac{\left(\frac{1}{1+r}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{1+r} - 1\right)}$

– ikke så pen brøk!

Men summen er også en geometrisk rekke den andre veien. Da er

$a_1 = \frac{A}{(1+r)^n}$, antall ledd $= n$, $k = 1+r$

Summen er da $\frac{A}{(1+r)^n} \cdot \frac{(1+r)^n}{r}$ — enklere å taste på kalk.!

Eks Hege vurderer en investering som skal gi utbetalinger på 4 mill kvart år. i 10 år, med første utbetaling om 1 år. Anta diskonteringsrenten er 15%. Hva er fair pris for denne investeringen?

Løsning fair pris = nåverdien til kontantstrømmen:

$$\frac{4}{1,15} + \frac{4}{1,15^2} + \frac{4}{1,15^3} + \dots + \frac{4}{1,15^{10}}$$

— en geom. rekke

med $a_1 = \frac{4}{1,15^{10}}$, $k = 1,15$, $n = 10$

gir $\frac{4}{1,15^{10}} \cdot \frac{1,15^{10} - 1}{0,15} = \underline{\underline{20,08}}$