MET 1183, 2. forelesning, 20. aug. 2026, Runar Ile

Plan
1. Repetisjon
2. Fremtidsverdi og nåverdi
3. Den totale nåverdien til en kontantstrøm
4. Internrente.

---

1. Repetisjon

Prioriteringsregler

$2+3\cdot 4 = 14$

$(2+3)\cdot 4 = 20$

$-3^2 = (-1)\cdot 3\cdot 3 = -9$

$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$

og $-3\cdot 4 = (-1)\cdot 3\cdot 4 = -12$

Eks $$\frac{\sqrt{1{,}03}^{10}}{1{,}03^4} = \frac{\left(1{,}03^{\frac{1}{2}}\right)^{10}}{1{,}03^4} = \frac{1{,}03^{\frac{1}{2}\cdot 10}}{1{,}03^4} = \frac{1{,}03^5}{1{,}03^4}$$

$$= 1{,}03^{5-4} = \underline{\underline{1{,}03}}$$

Oppg Beregn $1{,}11^{\sqrt{2}}$ på kalkulatoren.
(svar : 1,159035.....)

Løsning $1{,}11$ [y^x] 2 [$\sqrt{x}$] [=]

Oppg Beregn $1{,}12^{-1}$ på kalk.

Løsning 1 $1{,}12$ [y^x] 1 [+/-] [=]

Løsning 2 $1{,}12$ [1/x] (fordi $1{,}12^{-1} = \frac{1}{1{,}12}$)

Oppg Etter 5 år med renter (årlig forrentning) har innskuddet på 50 000 vokst til 60 000. Beregn den effektive renten (= årlige renten)

Løsning Den 5-årige vekstfaktoren er

$\frac{60000}{50000} = 1,2$. La g være den årlige vekstfaktoren. Da er $g^5 = 1,2$.

Så $g = \sqrt[5]{1,2} = 1,2^{0,2} = 1,03714$

og den effektive renten $r_{eff} = g - 1 = 0,03714$

$= \underline{3,714\ \%}$

2. Fremtidsverdi, nåverdi

La K_0 være en investering/innskudd/betaling i dag. Fremtidsverdien K_n av K_0 om n år (el. terminer) med terminrente r er $K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$

Omvendt Anta K_n skal betales om n år. Da er nåverdien K_0 av K_n med rente r gitt som

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$$

EKS Bestem nåverdien av 30 mill. betalt om 5 år med 8% rente.

Løsning $K_0 = \frac{30 \text{ mill}}{1{,}08^5} = \underline{\underline{20{,}42 \text{ mill}}}$

Oppg Bestem nåverdien av 50 000 betalt 3 år fra nå med 4% rente.

Løsning $\frac{50\,000}{1{,}04^3} = \underline{\underline{44\,449{,}82}}$

Kalk: 50000 ÷ 1,04 y^x 3 =

Start: 9.00

Nåverdien til et beløp (K_n) som betales n år fra nå med rente r = hva du må sette på konto i dag (K_0) for at balansen skal være K_n om n år hvis renten er r.

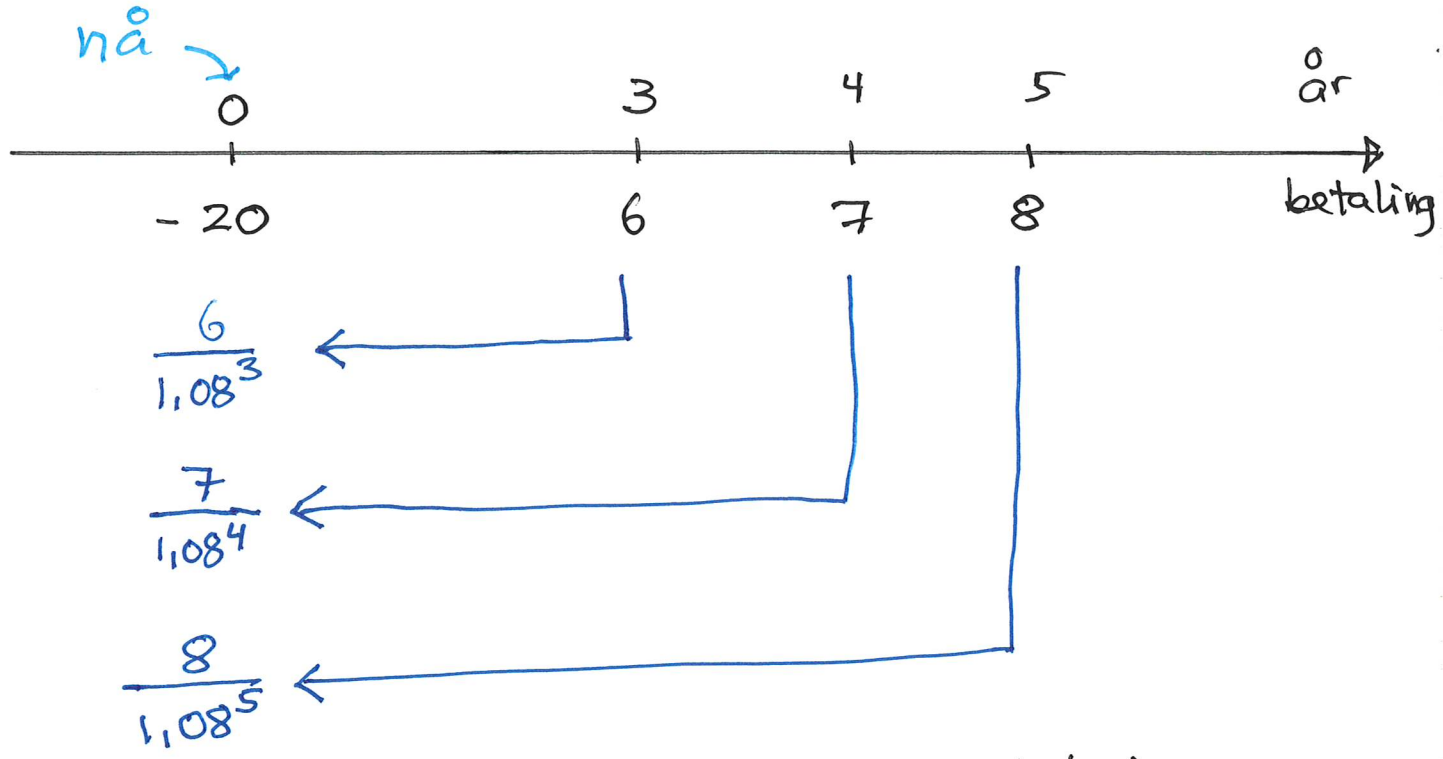
---

3. Den totale nåverdien til en betalingsstrøm.

EKS Du betaler 20 mill i dag, og får tilbake

6 mill etter 3 år
7 —"— 4 år
8 —"— 5 år

Med 8% rente, hva er (den totale) nåverdien av kontantstrømmen?
- Det er summen av nåverdiene til hver av betalingene.



Summen av nåverdiene = den totale nåverdien av kontantstrømmen

$$= -20 + \frac{6}{1{,}08^3} + \frac{7}{1{,}08^4} + \frac{8}{1{,}08^5} = \underline{\underline{-4{,}65}}$$

Noen tolkninger

1) Får ikke 8 % avkastning på denne investeringen.

2) Med disse tilbakebetalingene kan låntager få låne 15,35 mill (ikke 20).

3) Låntager betaler mer (og får låne 20) f. eks. $4{,}65 \cdot 1{,}08^6$ ekstra om 6 år

Både (2) og (3) har nåverdi 0.
Dette er da balanserte låneavtaler.

4. Internrente

Internrenten til en kontantstrøm er den renten som gjør at nåverdien til kontantstrømmen blir 0.

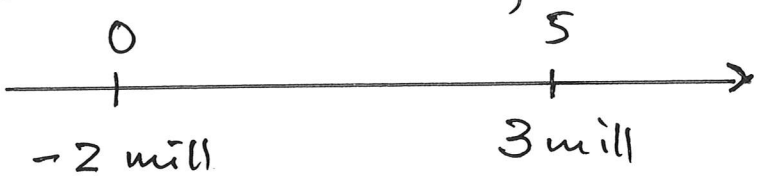
- Generelt vanskelig å beregne for hånd.

I tilfellet over må vi løse likningen

$$-20 + \frac{6}{(1+x)^3} + \frac{7}{(1+x)^4} + \frac{8}{(1+x)^5} = 0$$

Svar: $x \approx 1{,}12\,\%$ - gjette-og-prøve

Eks Kontantstrøm med to betalinger



er nåverdien til denne kontantstrømmen

$$-2 \text{ mill} + \frac{3 \text{ mill}}{(1+r)^5}$$

Internrenten til kontantstrømmen er den rente r som gjør nåverdien = 0

Dvs internrenten er løsningen på likningen

$$-2 \text{ mill} + \frac{3 \text{ mill}}{(1+r)^5} = 0$$

dvs $\frac{3 \text{ mill}}{(1+r)^5} = 2 \text{ mill}$ dvs $3 \text{ mill} = 2 \text{ mill} \cdot (1+r)^5$

Deler på 2 mill. på begge sider:

dvs $(1+r)^5 = \frac{3 \text{ mill}}{2 \text{ mill}} = 1,5$

så $1+r = (1,5)^{\frac{1}{5}} = 1,0845$

Så internrenten er

$r = 1,0845 - 1 = \underline{\underline{8,45\ \%}}$