Eksamenssett III er det tredje av tre sett med øvingsoppgaver for eksamen. Oppgavene på alle settene vil ha vanskelighetsgrad innenfor det som kan forventes på avsluttende eksamen i kurset. Eksamenssett III (dette settet) har høyere vanskelighetsgrad (altså noe høyere enn de to første settene).

Tillatte hjelpmidler er BI-godkjent kalkulator og vedlagt formelark. Eksamenstid er 5 timer. Maksimal score er 96p. Karakterskala er A: 86p. B: 73p. C: 55p. D: 44p. E: 38p. Avsluttende eksamen vil ha 15 punkter (dette settet har 16 punkter).

Alle svar skal begrunnes. Det blir lagt vekt på at framgangsmåte og resultat presenteres klart, presist og kortfattet når besvarelsen evalueres.

Oppgave 1.

Regn ut disse integralene:

(a) **(6p)** $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
(b) **(6p)** $\int \frac{9x-10}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$
(c) **(6p)** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 2.

Vi betrakter funksjonen

$$f(x) = \frac{9x-10}{x^2-3x+2}$$

(a) **(6p)** Skisser grafen til f og dens asymptoter. Vis utregningene du bruker for å skissere grafen.
(b) **(6p)** Finn eventuelle vendepunkter for f.

La I være et intervall, og betrakt funksjonen

$$f(x) = \frac{9x-10}{x^2-3x+2}, \quad D_f = I$$

(c) **(6p)** Bestem I slik at denne funksjonen har en omvendt funksjon f^{-1} med $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

Oppgave 3.

Vi betrakter det lineære systemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 3 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og a er en parameter.

(a) **(6p)** Løs det lineære systemet når $a = 2$.
(b) **(6p)** Finn determinanten $\det(A)$, og bestem verdiene av a slik at $\det(A) = 0$.
(c) **(6p)** Bestem alle verdier av a slik at $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger.
(d) **(6p)** Regn ut $A^T \cdot A$ når $a = 0$.

Oppgave 4.

(6p) Et eiendomsselskap regner med at deres eiendommer vil gi løpende inntekter de neste ti årene gitt ved inntektsraten

$$I(t) = 110 \cdot \mathrm{e}^{t/5}, \quad 0 \leq t \leq 10$$

målt i mill. kr per år. Denne inntektsraten antas å være kontinuerlig funksjon. Kostnadene ved driften antas å være konstant på 100 mill. kr per år. Tegn en skisse som viser det totale driftsoverskuddet for de ti årene som et areal, og regn ut samlet nåverdi når vi antar kontinuerlig diskontering med rente $r = 10\%$.

Oppgave 5.

Vi betrakter funksjonen $f(x,y) = xy(x - y - 1)$.

(a) **(6p)** Regn ut de partiell-deriverte til f, og finn alle stasjonære punkter.
(b) **(6p)** Klassifiser de stasjonære punktene, og avgjør om f har maksimum eller minimum.

Oppgave 6.

Vi betrakter Lagrange-problemet

$$\min f(x,y) = x^2 + y^2 - 4y \quad \text{når} \quad 2x - y^2 = 1$$

(a) **(6p)** Lag en skisse av kurven $2x - y^2 = 1$, og avgjør om dette er en begrenset mengde.
(b) **(6p)** Skriv ned Lagrange-betingelsene, og finn alle punkter $(x,y;\lambda)$ som oppfyller betingelsene.
(c) **(6p)** Løs Lagrange-problemet og finn minimumsverdien, hvis den eksisterer.

Formelsamling

1 Finansmatematikk

Geometriske rekker. En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier. Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er henholdsvis

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

2 Integrasjon

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \,\mathrm{d}x = uv - \int uv' \,\mathrm{d}x$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \,\mathrm{d}x = \int f(u) \,\mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \mathrm{d}x$$

Areal. Regionen gitt ved $f(x) \leq y \leq g(x)$ for $a \leq x \leq b$ har areal

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \,\mathrm{d}x$$

3 Lineær algebra

Cramers regel. Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \ldots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ er matrisen som framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med $\mathbf{b}$.

4 Funksjoner i flere variable

Annenderivert-testen. Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x,y)$ er et

a) lokalt minimum om $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
b) lokalt maksimum om $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
c) sadelpunkt om $AC - B^2 < 0$

når vi setter $A = f''_{xx}(x^*, y^*)$, $B = f''_{xy}(x^*, y^*)$ og $C = f''_{yy}(x^*, y^*)$.

Nivåkurver. På nivåkurven $f(x,y) = c$ er den deriverte $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gitt ved

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Totalderivasjon. Når $z = f(x,y)$, og vi har $x = x(t)$ og $y = y(t)$, så er den totalderiverte

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$