Øvingsoppgaver	MET 1180 Matematikk for siviløkonomer
Eksamenssett II	Medium vanskelighetsgrad

Eksamenssett II er det andre av tre sett med øvingsoppgaver for eksamen. Oppgavene på alle settene vil ha vanskelighetsgrad innenfor det som kan forventes på avsluttende eksamen i kurset. Eksamenssett II (dette settet) har middels vanskelighetsgrad (altså noe høyere enn det første settet).

Tillatte hjelpmidler er BI-godkjent kalkulator og vedlagt formelark. Eksamenstid er 5 timer. Maksimal score er 96p. Karakterskala er A: 86p. B: 73p. C: 55p. D: 44p. E: 38p. Avsluttende eksamen vil ha 15 punkter (dette settet har 16 punkter).

Alle svar skal begrunnes. Det blir lagt vekt på at framgangsmåte og resultat presenteres klart, presist og kortfattet når besvarelsen evalueres.

Oppgave 1.

Regn ut disse integralene:

(a) **(6p)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2-x)^2}\,\mathrm{d}x$

(b) **(6p)** $\displaystyle\int \sqrt{x}\cdot \ln x\,\mathrm{d}x$

(c) **(6p)** $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 2.

Vi betrakter funksjonen

$$f(x) = \frac{8x}{(x+1)^2} - 1, \quad x \neq -1$$

(a) **(6p)** Bestem alle verdier av x slik at $f(x) \geq 0$.

(b) **(6p)** Finn maksimumsverdien til f, hvis den eksisterer.

(c) **(6p)** Skissér området $\mathcal{R}$ begrenset av grafen til f og x-aksen, og finn arealet til $\mathcal{R}$.

Oppgave 3.

Vi betrakter det lineære systemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ a & 1 & a \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

og a er en parameter.

(a) **(6p)** Løs det lineære systemet når $a = 1$.

(b) **(6p)** Finn determinanten $\det(A)$, og bestem verdiene av a slik at $\det(A) = 0$.

(c) **(6p)** Bestem alle verdier av a slik at $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger.

(d) **(6p)** Bestem alle verdier av a slik at $A^2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger.

Oppgave 4.

(6p) Vis at hvis enhetskostnaden er minimal, så er enhetskostnad lik grensekostnad. Finn så den minimale enhetskostnaden når kostnadsfunksjonen er gitt ved $C(x) = x^3 + 1200x + 16000$.

Oppgave 5.

Vi betrakter funksjonen $f(x,y) = xy^2 + x^3y - xy$.

(a) **(6p)** Regn ut de partiell-deriverte til f, og finn alle stasjonære punkter.
(b) **(6p)** Regn ut Hesse-matrisen til f, og klassifiser alle stasjonære punkter.

Oppgave 6.

Vi betrakter Lagrange-problemet

$$\max f(x,y) = 2x + 3y \quad \text{når} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36$$

(a) **(6p)** Lag en skisse av kurven $4x^2 + 9y^2 = 36$, og avgjør om dette er en begrenset mengde.
(b) **(6p)** Skriv ned Lagrange-betingelsene, og finn alle punkter $(x,y;\lambda)$ som oppfyller betingelsene.
(c) **(6p)** Løs Lagrange-problemet og finn maksimumsverdien, hvis den eksisterer.

Formelsamling

1 Finansmatematikk

Geometriske rekker. En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier. Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er henholdsvis

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

2 Integrasjon

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, \mathrm{d}x = uv - \int uv' \, \mathrm{d}x$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \, \mathrm{d}x = \int f(u) \, \mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \mathrm{d}x$$

Areal. Regionen gitt ved $f(x) \leq y \leq g(x)$ for $a \leq x \leq b$ har areal

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, \mathrm{d}x$$

3 Lineær algebra

Cramers regel. Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \ldots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ er matrisen som framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med $\mathbf{b}$.

4 Funksjoner i flere variable

Annenderivert-testen. Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x, y)$ er et

a) lokalt minimum om $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
b) lokalt maksimum om $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
c) sadelpunkt om $AC - B^2 < 0$

når vi setter $A = f''_{xx}(x^*, y^*)$, $B = f''_{xy}(x^*, y^*)$ og $C = f''_{yy}(x^*, y^*)$.

Nivåkurver. På nivåkurven $f(x, y) = c$ er den deriverte $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gitt ved

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Totalderivasjon. Når $z = f(x, y)$, og vi har $x = x(t)$ og $y = y(t)$, så er den totalderiverte

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$