Oppgave 1.

(a) Vi har at $f'_x = 2xy - 3x^2$ og $f_y = x^2 + 2y$. Hessematrisen blir dermed

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2y - 6x & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Ved kvotientregelen har vi at

$$f'_x = \frac{y(x+y) - xy(1)}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}$$
$$f'_y = \frac{x(x+y) - xy(1)}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

og de andreordens partiellderiverte blir

$$f''_{xx} = \frac{0(x+y)^2 - y^2 \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{-2y^2}{(x+y)^3}$$
$$f''_{xy} = \frac{2y(x+y)^2 - y^2 \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{2y(x+y) - 2y^2}{(x+y)^3} = \frac{2xy}{(x+y)^3}$$
$$f''_{yy} = \frac{0(x+y)^2 - x^2 \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{-2x^2}{(x+y)^3}$$

Hessematrisen blir

$$H(f) = \begin{pmatrix} -2y^2 & 2xy \\ 2xy & -2x^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(x+y)^3}$$

Siden $1/(x+y)^3$ er felles faktor i hele matrisen, kan vi forenkle matrisen ved å faktorisere den ut.

(c) Ved produktregelen har vi at

$$f'_x = 1 \cdot e^{x+y} + xe^{x+y} \cdot 1 = (x+1)e^{x+y}$$
$$f'_y = xe^{x+y} \cdot 1 = xe^{x+y}$$

og de andreordens partiellderiverte blir

$$f''_{xx} = 1 \cdot e^{x+y} + (x+1)e^{x+y} \cdot 1 = (x+2)e^{x+y}$$
$$f''_{xy} = (x+1)e^{x+y} \cdot 1 = (x+1)e^{x+y}$$
$$f''_{yy} = xe^{x+y} \cdot 1 = xe^{x+y}$$

Hessematrisen blir

$$H(f) = \begin{pmatrix} x+2 & x+1 \\ x+1 & x \end{pmatrix} e^{x+y}$$

(d) Vi skriver funksjonen som $f(x,y) = \ln(u)$ med kjerne $u = x^2 + y^2 + 4$. Ved kjerneregelen har vi at

$$f'_x = \frac{1}{u} \cdot u'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 4}$$
$$f'_y = \frac{1}{u} \cdot u'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 4}$$

og de andreordens partiellderiverte blir ved kvotientregelen

$$f''_{xx} = \frac{2(x^2 + y^2 + 4) - 2x(2x)}{u^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2 + 8}{(x^2 + y^2 + 4)^2}$$
$$f''_{xy} = \frac{0(x^2 + y^2 + 4) - 2x(2y)}{u^2} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 4)^2}$$
$$f''_{yy} = \frac{2(x^2 + y^2 + 4) - 2y(2y)}{u^2} = \frac{2x^2 - 2y^2 + 8}{(x^2 + y^2 + 4)^2}$$

Hessematrisen blir

$$H(f) = \begin{pmatrix} -x^2+y^2+4 & -4xy \\ -4xy & x^2-y^2+4 \end{pmatrix} \cdot \frac{2}{(x^2+y^2+4)^2}$$

(e) Vi skriver funksjonen som $f(x,y) = \sqrt{u}$ med kjerne $u = 2xy+1$. Kjerneregelen gir at

$$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_x = \frac{2y}{2\sqrt{u}} = \frac{y}{\sqrt{2xy+1}}$$
$$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_y = \frac{2x}{2\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{2xy+1}}$$

og de andreordens partiellderiverte blir ved kvotientregelen

$$f''_{xx} = \frac{0(\sqrt{u}) - y(y/\sqrt{u})}{u} = \frac{-y^2}{u\sqrt{u}} = \frac{-y^2}{(2xy+1)\sqrt{2xy+1}}$$
$$f''_{xy} = \frac{1(\sqrt{u}) - y(x/\sqrt{u})}{u} = \frac{u-xy}{u\sqrt{u}} = \frac{xy+1}{(2xy+1)\sqrt{2xy+1}}$$
$$f''_{yy} = \frac{0(\sqrt{u}) - x(x/\sqrt{u})}{u} = \frac{-x^2}{u\sqrt{u}} = \frac{-x^2}{(2xy+1)\sqrt{2xy+1}}$$

Hessematrisen blir

$$H(f) = \begin{pmatrix} -y^2 & xy+1 \\ xy+1 & -x^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(2xy+1)\sqrt{2xy+1}}$$

Oppgave 2.

(a) Førsteordensbetingelsene gir

$$f'_x = 2xy - 3x^2 = 0, \quad f'_y = x^2 + 2y = 0$$

Andre likning gir $y = -x^2/2$, og innsatt i første likning får vi

$$x(-x^2) - 3x^2 = -x^2(x+3) = 0$$

Dermed er $x = 0$ eller $x = -3$, og vi får to stasjonære punkter $(0,0)$ og $(-3,9/2)$. I disse punktene er Hesse-matrisen

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(f)(-3,9/2) = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Førsteordensbetingelsene gir

$$f'_x = \frac{y^2}{(x+y)^2} = 0$$
$$f'_y = \frac{x^2}{(x+y)^2} = 0$$

Dette gir $x = y = 0$. Men punktet $(0,0)$ er et kritisk punkt og ikke et stasjonært punkt, siden $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ ikke eksisterer (på grunn av divisjon med null). Det er altså ingen stasjonære punkter.

(c) Førsteordensbetingelsene gir

$$f'_x = (x+1)e^{x+y} = 0$$
$$f'_y = xe^{x+y} = 0$$

Dette gir $x + 1 = x = 0$, som ikke har noen løsninger. Det er ingen stasjonære punkter.

(d) Førsteordensbetingelsene gir

$$f'_x = \frac{2x}{x^2+y^2+4} = 0$$
$$f'_y = \frac{2y}{x^2+y^2+4} = 0$$

Dette gir $x = y = 0$, og det er dermed ett stasjonært punkt (0,0). Hesse-matrisen i dette punktet er

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{2}{16} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(e) Førsteordensbetingelsene gir

$$f'_x = \frac{y}{\sqrt{2xy+1}} = 0$$
$$f'_y = \frac{x}{\sqrt{2xy+1}} = 0$$

Dette gir $y = x = 0$, og dermed er det ett stasjonært punkt (0,0). Hesse-matrisen i dette punktet er

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1\sqrt{1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 3.

(a) De partiellderiverte til f er gitt ved

$$f'_x = 2x - 2, \quad f'_y = 4y$$

Førsteordensbetingelsene er derfor $2x - 2 = 0$ og $4y = 0$, som gir $x = 1$ og $y = 0$. Det er ett stasjonært punkt $(x,y) = (1,0)$.

(b) Hesse-matrisen til f er gitt ved

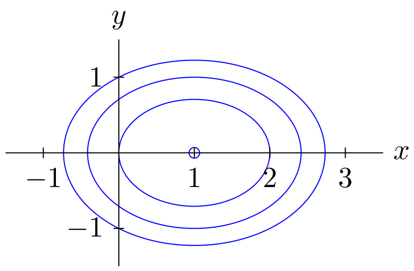
$$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Dette er en konstant matrise, så $H(f)(1,0) = H(f)$, og det $H(f) = 8$. Dermed gir andrederivert-testen at (1,0) er et lokalt minimum, siden $A = 2 > 0$.

(c) Nivåkurvene er skissert nedenfor. For $h = -2$ har nivåkurven ingen punkter, for $h = -1$ har den ett punkt (1,0), og for $h > -1$ blir det en ellipse med senter i (1,0). Det kan vi se ved å fullføre kvadratet:

$$x^2 - 2x + 2y^2 = h \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 + 2y^2 = h+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{h+1} + \frac{y^2}{(h+1)/2} = 1$$

Når $h > -1$, har ellipsen halvakser $a = \sqrt{h+1}$ og $b = \sqrt{(h+1)/2}$ som øker med økende verdier for h. Når $h < -1$, har nivåkurven ingen punkter.



(d) Siden f kun har ett stasjonært punkt (og ingen andre kritiske punkter eller randpunkter), er $(x,y) = (1,0)$ eneste kandidat til maksimum eller minimum, og vi har funnet at det er et lokalt minimumspunkt. Derfor har f ingen maksimumspunkter. Siden $f(1,0) = -1$ og

$$f(x,y) = x^2 - 2x + 2y^2 = (x-1)^2 + 2y^2 - 1 \geq -1$$

for alle (x,y), på grunn av at $(x-1)^2, 2y^2 \geq 0$, følger det at $(x,y) = (1,0)$ er et globalt minimum for f. Det kan vi også se fra nivåkurvene i deloppgave c) ovenfor.

Oppgave 4.

(a) De partiellderiverte til f er gitt ved

$$f'_x = 3x^2y^2 + 2x - 2, \quad f'_y = 2x^3y$$

Førsteordensbetingelsene er derfor $3x^2y^2 + 2x - 2 = 0$ og $2x^3y = 0$, som gir $x = 0$ eller $y = 0$ fra siste likning. Innsatt i første likning gir $x = 0$ at $-2 = 0$, som ikke har noen løsning, og $y = 0$ at $2x - 2 = 0$, som har løsning $x = 1$. Det er ett stasjonært punkt $(x,y) = (1,0)$.

(b) Siden $f(x,y)$ er et polynom, har f hverken kritiske punkter (de partiellderiverte eksisterer overalt) eller randpunkter (f er definert for alle (x,y) i $\mathbb{R}^2$).

(c) Hesse-matrisen til f er gitt ved

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6xy^2 + 2 & 6x^2y \\ 6x^2y & 2x^3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dermed er $\det H(f)(1,0) = 4 > 0$, og det betyr at $(1,0)$ et lokalt minimumspunkt siden $A = 2 > 0$.

(d) Siden f kun har ett stasjonært punkt (og ingen andre kritiske punkter eller randpunkter), er $(x,y) = (1,0)$ eneste kandidat til maksimum eller minimum, og vi har funnet at det er et lokalt minimumspunkt. Derfor har f ingen maksimumspunkter. For å undersøke om $(1,0)$ er globalt minimumspunkt, sjekker vi om det finnes funksjonsverdier mindre enn $f(1,0) = -1$. For eksempel gir $y = 1$ at

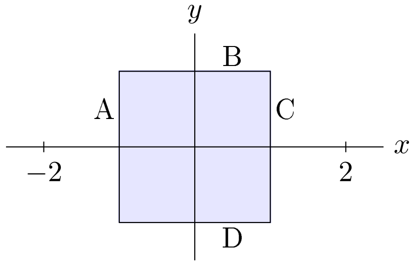
$$f(x,1) = x^3 + x^2 - 2x \to -\infty \text{ når } x \to -\infty$$

at $(1,0)$ ikke er et globalt minimum. Mer konkret kan vi velge $x = -3$, da får vi $f(-3,1) = -27 + 9 + 6 = -12$, som er mindre enn $f(1,0) = -1$. Legg merke til at andre valg enn $y = 1$ kunne vært mulig, og når vi først har valgt $y = 1$, kunne vi også sett på andre x-verdier enn $x = -3$. Hovedsaken er at $f(x,1) \to -\infty$ når $x \to -\infty$, så ethvert valg av x som er mye mindre enn null ville gitt et eksempel på et punkt med funksjonsverdi mindre enn -1.

Oppgave 5.

(a) En skisse av definisjonsområdet til f er vist nedenfor. Randpunktene til f er punktene på de fire sidekantene

$$\begin{aligned} A&: \quad x = -1, \ -1 \le y \le 1 \\ B&: \quad y = 1, \ -1 \le x \le 1 \\ C&: \quad x = 1, \ -1 \le y \le 1 \\ D&: \quad y = -1, \ -1 \le x \le 1 \end{aligned}$$



(b) De partiellderiverte til f er gitt ved

$$f'_x = 3x^2y^2 + 2xy - y, \quad f'_y = 2x^3y + x^2 - x$$

Førsteordensbetingelsene er derfor

$$\begin{aligned} f'_x &= 3x^2y^2 + 2xy - y = y(3x^2y + 2x - 1) = 0 \\ f'_y &= 2x^3y + x^2 - x = x(2x^2y + x - 1) = 0 \end{aligned}$$

Legg merke til at vi har faktorisert likningene. I første likning er $y = 0$ eller $3x^2y + 2x - 1 = 0$. Hvis $y = 0$, så gir andre likning $x = 0$ eller $x - 1 = 0$. Dette gir oss punktene $(0,0)$ og $(1,0)$. Hvis $y \neq 0$, så gir første likning at $3x^2y + 2x - 1 = 0$, og andre likning gir $x = 0$ eller $2x^2y + x - 1$. Hvis $x = 0$, gir dette $-1 = 0$ i første likning, som ikke gir noen løsninger. De siste og vanskeliste tilfellet er hvor $x \neq 0$ og $y \neq 0$. Da gir likningene

$$3x^2y + 2x - 1 = 0, \quad 2x^2y + x - 1 = 0$$

Vi løser begge likninger for x^2y og setter disse lik hvorandre. Det gir

$$\frac{1-2x}{3} = x^2y = \frac{1-x}{2} \quad \Rightarrow \quad 2(1-2x) = 3(1-x)$$

Dette gir $x = -1$, og dermed $y = 1$. Vi får et tredje punkt $(-1,1)$. Vi ser at de tre punktene vi har funnet er det indre punktet $(0,0)$ og randpunktene $(1,0)$ og $(-1,1)$.

(c) Hesse-matrisen til f i det indre stasjonære punktet $(0,0)$ er

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6xy^2 + 2y & 6x^2y + 2x - 1 \\ 6x^2y + 2x - 1 & 2x^3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Siden $\det H(f)(0,0) = -1 < 0$, er det indre stasjonære punktet $(0,0)$ et sadelpunkt.

(d) Siden definisjonsområdet D_f er lukket og begrenset, har f både minimum og maksimum på D_f. Det kan ikke være stasjonære (eller kritiske) punkter i det indre, og det må derfor være randpunkter. Vi ser på randen til f, og regner ut funksjonsverdien i de fire hjørnene:

$$f(-1,-1) = -2, \quad f(1,-1) = 2, \quad f(1,1) = 2, \quad f(-1,1) = 2$$

Vi sjekker også de fire sidekantene:
På A er $f(-1,y) = -y^2 + 2y + 1$, og $f(-1,y)'_y = -2y + 2 \geq 0$ for $-1 \leq y \leq 1$. Derfor er funksjonsverdien voksende på A, og $f(-1,-1) = -2$ og $f(-1,1) = 2$ er minste og største verdi på A.
På B er $f(x,1) = x^3 + x^2 - x + 1$, og $f(x,1)'_x = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$. Derfor er funksjonen voksende på B når $x \geq 1/3$, og avtagende når $x \leq 1/3$. Det følger at $f(1/3,1) = 22/27$ er den minste verdien og $f(1,1) = f(-1,1) = 2$ er den største verdien på B.
På C er $f(1,y) = y^2 + 1$, og $f(-1,y)'_y = 2y$. Derfor er funksjonen voksende for $y \geq 0$ og avtagende for $y \leq 0$. Dermed er $f(1,0) = 1$ den minste verdien på C, og $f(1,-1) = f(1,1) = 2$ den største verdien.
På D er $f(x,-1) = x^3 - x^2 + x + 1$, og $f(x,-1)'_x = 3x^2 - 2x + 1 \geq 0$. Derfor er funksjonen voksende på D. Det følger at $f(-1,-1) = -2$ er den minste verdien på D, og $f(1,-1) = 2$ den største verdien.
Vi oppsummerer disse resultatene, og ser at $f(1,-1) = f(1,1) = f(-1,1) = 2$ er den største verdien til f på randen, og $f(-1,-1) = -2$ er den minste verdien på randene. Dette er minimums- og maksimumsverdien til f.

Oppgave 6.

(a) Lagrange-funksjonen er $\mathcal{L}(x,y;\lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2)$, og Lagrange-betingelsene består av førsteordensbetingelsene (FOC)

$$\mathcal{L}'_x = y - \lambda(2x) = 0$$
$$\mathcal{L}'_y = x - \lambda(2y) = 0$$

sammen med bibetingelsen (C) $x^2 + y^2 = 4$.

(b) Vi løser (FOC)+(C). Det gir oss $y = 2\lambda x$ og $x - 2\lambda(2\lambda x) = 0$, eller $x - 4\lambda^2 x = 0$. Dermed er $x(1 - 4\lambda^2) = 0$, det vil si $x = 0$ eller $\lambda^2 = 1/4$. Hvis $x = 0$, så er $y = 0$ ved første likning, og $(x,y) = (0,0)$ oppfyller ikke bibetingelsen. Hvis $\lambda^2 = 1/4$, så er $\lambda = \pm 1/2$. Med $\lambda = 1/2$, blir førsteordensbetingelsene $y = x$, og bibetingelsen gir

$$2x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Dette gir kandidatpunktene $(x,y;\lambda) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}; 1/2)$ og $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}; 1/2)$. Med $\lambda = -1/2$, blir $y = -x$ ved førsteordensbetingelsene, og bibetingelsen gir

$$2x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Dette gir kandidatpunktene $(x,y;\lambda) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}; -1/2)$ og $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}; -1/2)$. Totalt gir Lagrange-betingelsene fire kandidatpunkter, og vi har

$$f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 2, \quad f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -2$$

Dermed er de to første punktene kandidater for maksimumspunkter, og de to siste er kandidater for minimumspunkter.

(c) Vi skriver bibetingelsen $g(x,y) = c$ for en konstant c. Et tillatt punkt er et punkt som oppfyller bibetingelsen, og det har degenerert bibetingelse hvis $g'_x = g'_y = 0$. I dette problemet er bibetingelsen $g(x,y) = x^2 + y^2 = 4$, og dermed får vi

$$g'_x = 2x = 0, \quad g'_y = 2y = 0$$

som kun har løsningen $(x,y) = (0,0)$, som ikke er tillatt (det oppfyller ikke bibetingelsen $x^2 + y^2 = 4$). Det er derfor ingen kandidatpunkter med degenerert bibetingelse.

(d) Siden mengden av tillatte punkter er gitt ved $x^2 + y^2 = 4$, er den en sirkel med radius $r = 2$. Den er lukket og begrenset, og dermed har problemet både et maksimum og et minimum. Vi har funnet alle kandidater ovenfor, derfor er maksimum $f = 2$ i $(x,y) = (\sqrt{2},\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, og minimum er $f = -2$ i $(x,y) = (-\sqrt{2},\sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Oppgave 7.

(a) Vi kan skrive likningen til kurven C som $y(x^2 + y^2) - 2(x^2 - y^2) = 0$. Dermed er C nivåkurven $g(x,y) = h$ i høyde $h = 0$ når vi velger funksjonen g gitt ved ved

$$g(x,y) = y(x^2 + y^2) - 2(x^2 - y^2)$$

Dette gir $g'_x = 2xy - 4x$ og $g'_y = x^2 + 3y^2 + 4y$.

(b) Punktene med $y = -1$ er gitt ved likningen

$$g(x, -1) = -(x^2 + 1) - 2(x^2 - 1) = -3x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1/3$$

Dette gir $x = \pm\sqrt{1/3} = \pm\sqrt{3}/3$. Vi har derfor to punkter på C med $y = -1$, som er $(x,y) = (\sqrt{3}/3, -1)$ og $(-\sqrt{3}/3, -1)$.

(c) Tangenten til kurven C i disse puntkene er gitt ved likningen

$$y - y_0 = y'(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y = y_0 + y'(x_0,y_0) \cdot (x - x_0)$$

der $y_0 = -1$ og $x_0 = \pm\sqrt{3}/3$. Vi finner y' ved

$$g_x + g_y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{g'_x}{g'_y} = -\frac{2xy - 4x}{x^2 + 3y^2 + 4y}$$

Setter vi inn $y = -1$ får vi $y' = 6x/(x^2 - 1) = -9x$ siden $x^2 = 1/3$. I punktet med $x = \sqrt{3}/3$, får vi dermed $y' = -3\sqrt{3}$, og tangenten har likning

$$y = -1 - 3\sqrt{3}(x - \sqrt{3}/3) = 2 - 3\sqrt{3}x$$

I punktet med $x = -\sqrt{3}/3$, får vi $y' = 3\sqrt{3}$, og tangenten har likning

$$y = -1 + 3\sqrt{3}(x + \sqrt{3}/3) = 2 + 3\sqrt{3}x$$

Tangentlinjen blir altså $y = 2 - 3\sqrt{3}x$ og $y = 2 + 3\sqrt{3}x$.

(d) For å finne den største og minste verdien av y på nivåkurven $g(x,y) = 0$, setter vi inn $y = b$ og forsøker å løse likningen for x for en gitt verdi av b:

$$g(x,b) = b(x^2 + b^2) - 2(x^2 - b^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad (b - 2)x^2 = -2b^2 - b^3 = -b^2(2 + b)$$

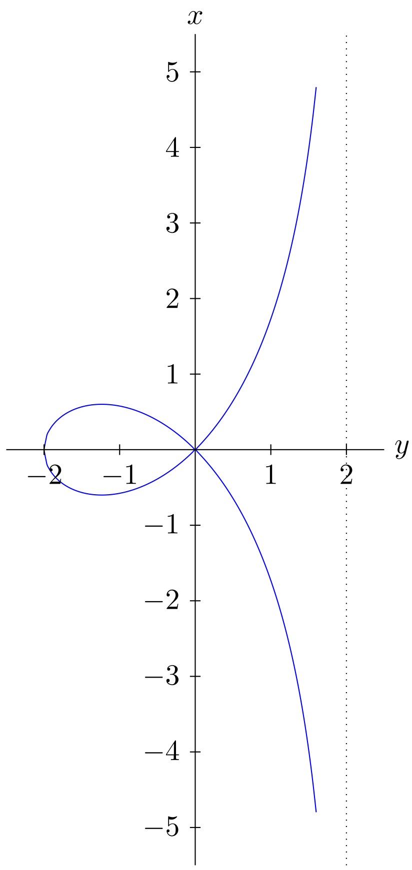
For $b = 2$, gir dette $0 = -16$, som ikke er oppfylt for noen verdier av x. Det betyr at det ikke er noen punkter (x,y) med $y = 2$ på kurven C. For $b \neq 2$ får vi

$$x^2 = -\frac{b^2(2 + b)}{b - 2} = \frac{b^2(2 + b)}{2 - b}$$

som har løsninger hvis og bare hvis b oppfyller ulikheten

$$\frac{b^2(2 + b)}{2 - b} \geq 0$$

Setter vi opp fortegnsdiagram for uttrykket på venstre side, ser vi at løsningene er $-2 \leq b < 2$. Dette betyr at $-2 \leq y < 2$ er y-verdiene til punktene på C. Dermed er $y = -2$ minimumsverdien i $(0, -2)$. Vi har ingen maksimumsverdi, siden vi har punkter med $y = b < 2$ for b vilkårlig nært 2, men ingen punkter med $y = 2$. Skisse av C er vist nedenfor. Mer at x-aksen er den vertikale aksen, for at det skal være enklere å vise C.



Oppgave 8.

Det er flere måter å løse oppgaven på. En metode er å løse bibetingelsen for y, som gir $y = 1/x$, og sette dette inn i funksjonen. Det gir

$$f(x,y) = f(x,1/x) = x^3 + 3x(1/x) + (1/x)^3 = x^3 + 3 + 1/x^3$$

Den eneste betingelsen x må oppfylle, er $x \neq 0$, siden $y = 1/x$. Vi kan derfor betrakte dette som et optimeringsproblem i én variabel x:

$$\max / \min \; x^3 + 3 + 1/x^3, \quad x \neq 0$$

Vi ser at når $x \to \infty$, så vil $f(x,1/x) \to \infty$, og når $x \to -\infty$, så vil $f(x,1/x) \to -\infty$, siden x^3 vil bli det dominerende leddet i begge tilfeller. Dette betyr at det hverken finnes noe maksimum eller noe minimum.

En alternativ metode ville være å sette opp dette som et standard Lagrange-problem. Siden $xy = 1$, kunne vi da erstatte leddet $3xy$ med $3 \cdot 1 = 3$, og vi får

$$\max / \min \; x^3 + 3 + y^3 \quad \text{når} \quad xy = 1$$

Her ville Lagrange-funksjonen blitt $\mathcal{L} = x^3 + 3 + y^3 - \lambda xy$, og kandidatpunktene ville blitt $(x,y) = (1,1)$ og $(-1,-1)$, med $f(1,1) = 5$ og $f(-1,-1) = 1$. Men ingen av disse kandidatpunkter er maksimum eller minimum, siden $f \to \pm\infty$.