Eksamen	MET 11803 Matematikk for siviløkonomer
Dato	20. desember 2018 kl 0900 - 1400

Eksamensoppgaven består av 15 delspørsmål med samme vekt, som har maksimal score 6p hver og totalt har maksimal score 90p (100%).

Alle svar skal begrunnes. Det blir lagt vekt på at framgangsmåte og resultat presenteres klart, presist og kortfattet når besvarelsen evalueres.

Oppgave 1.

Vi betrakter det lineære systemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ a & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 3-a \end{pmatrix}$$

og a er en parameter.

(a) **(6p)** Løs det lineære systemet når $a = 1$.
(b) **(6p)** Finn determinanten $\det(A)$, og bestem verdiene av a slik at $\det(A) = 0$.
(c) **(6p)** Bestem alle verdier av a slik at $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger.
(d) **(6p)** Regn ut $A^2 - 3A$ når $a = 1$.

Oppgave 2.

Regn ut disse integralene:

a) **(6p)** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ b) **(6p)** $\displaystyle\int \frac{1-\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ c) **(6p)** $\displaystyle\int \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 3.

Vi ser på funksjonen definert ved

$$f(x) = \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

(a) **(6p)** Regn ut $f'(x)$.
(b) **(6p)** Vis at f er avtagende i definisjonsområdet $D_f = (0, \infty)$.
(c) **(6p)** Bestem grenseverdiene

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x \to \infty} f(x)$$

(d) **(6p)** Lag en grov skisse av grafen til f, basert på det du har funnet ut tidligere i oppgaven, og markér området som ligger mellom grafen til f og x-aksen (for $x > 0$) på tegningen. Bestem så arealet til dette området.

Oppgave 4.

Vi ser på funksjonen definert ved

$$f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$$

(a) **(6p)** Finn alle stasjonære punkter for f.
(b) **(6p)** Regn ut Hesse-matrisen til f, og bruk den til å klassifisere de stasjonære punktene.
(c) **(6p)** Avgjør om f har globale maksimums- eller minimumverdier.
(d) **(6p)** Løs følgende Lagrange-problem:

$$\max f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y^2 \text{ når } x^2 + 2y^2 = 5$$

Formelsamling

1 Finansmatematikk

Geometriske rekker. En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier. Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er henholdsvis

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

2 Integrasjon

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \,\mathrm{d}x = uv - \int uv' \,\mathrm{d}x$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \,\mathrm{d}x = \int f(u) \,\mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \mathrm{d}x$$

Areal. Regionen gitt ved $f(x) \leq y \leq g(x)$ for $a \leq x \leq b$ har areal

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \,\mathrm{d}x$$

3 Lineær algebra

Cramers regel. Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \ldots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ er matrisen som framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med $\mathbf{b}$.

4 Funksjoner i flere variable

Annenderivert-testen. Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x,y)$ er et

a) lokalt minimum om $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
b) lokalt maksimum om $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
c) sadelpunkt om $AC - B^2 < 0$

når vi setter $A = f''_{xx}(x^*, y^*)$, $B = f''_{xy}(x^*, y^*)$ og $C = f''_{yy}(x^*, y^*)$.

Nivåkurver. På nivåkurven $f(x,y) = c$ er den deriverte $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gitt ved

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Totalderivasjon. Når $z = f(x,y)$, og vi har $x = x(t)$ og $y = y(t)$, så er den totalderiverte

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$