Løsning	MET 11803 Matematikk for siviløkonomer
Dato	20. desember 2018 kl 0900 - 1400

Oppgave 1.

(a) Vi løser det lineære systemet for $a = 1$ ved Gauss-eliminasjon. Vi finner først den utvidede matrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Deretter finner vi en trappeform ved å bruke elementære radoperasjoner:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

Vi ser at systemet har en entydig løsning, og vi finner løsningen ved baklengs substitusjon. Siste likning gir $-5z = 5$, eller $z = -1$, andre likning gir $y + 2(-1) = -2$, eller $y = 0$, og første likning gir $x + 0 + (-1) = 1$, eller $x = 2$. Dermed er løsningen $(x,y,z) = (2,0,-1)$.

(b) Vi regner ut determinanten til A, og velger å utvikle $|A|$ langs tredje kolonne:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ a & 3 & 0 \end{vmatrix} = a(3 - 2a) - 3(3a - a) = 3a - 2a^2 - 6a = -2a^2 - 3a = -a(2a + 3)$$

Dermed er $|A| = 0$ hvis $a = 0$ eller $a = -3/2$.

(c) Vi vet fra teori at det lineære systemet har én løsning hvis $|A| \neq 0$, og ingen eller uendelig mange løsninger hvis $|A| = 0$. I dette tilfellet er $|A| = 0$ for $a = 0$ eller $a = -3/2$ fra (b). For $a = 0$ undersøker vi antall løsninger ved å bruke Gauss-eliminasjon:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Det viser at det er en fri variabel, og uendelig mange løsninger når $a = 0$. For $a = -3/2$ bruker vi tilsvarende framgangsmåte:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3/2 & 1 & -3/2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3/2 \\ -3/2 & 3 & 0 & 9/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3/2 \\ -3/2 & 1 & -3/2 & 1 \\ -3/2 & 3 & 0 & 9/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3/2 \\ 0 & 4 & 3 & 13/4 \\ 0 & 6 & 9/2 & 27/4 \end{array}\right)$$

Det lineære systemet har ingen løsninger når $a = -3/2$ siden neste steg gir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3/2 \\ 0 & 4 & 3 & 13/4 \\ 0 & 6 & 9/2 & 27/4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3/2 \\ 0 & 4 & 3 & 13/4 \\ 0 & 0 & 0 & 15/8 \end{array}\right)$$

Dermed har det lineære systemet uendelig mange løsninger kun for $a = 0$.

(d) Når $a = 1$, er matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir at

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 6 & 14 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Oppgave 2.

(a) Vi løser dette integralet ved å bruke at $1/x^2 = x^{-2}$:

$$\int \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x = \int x^{-2}\ \mathrm{d}x = -1x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

(b) Vi løser integralet ved delvis integrasjon, der vi tenker på $1/x^2 = x^{-2}$ som en faktor. Vi velger $u' = 1/x^2$ og $v = 1 - \ln x$, som gir $u = -1/x$ fra forrige oppgave, og $v' = -1/x$. Delvis integrasjon gir dermed

$$\begin{aligned}\int \frac{1-\ln x}{x^2}\ \mathrm{d}x &= \int x^{-2}\cdot(1-\ln x)\,\mathrm{d}x = \int u'\cdot v\,\mathrm{d}x = u\cdot v - \int u\cdot v'\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{x}\cdot(1-\ln x) - \int \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C = \frac{\ln x}{x} + C\end{aligned}$$

(c) Vi løser integralet ved substitusjonen $u = 1 - \sqrt{x}$, som gir $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/(-2\sqrt{x})$, og dermed

$$\int \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{e^u}{\sqrt{x}}\cdot(-2\sqrt{x})\,\mathrm{d}u = \int -2e^u\,\mathrm{d}u = -2e^u + C = -2e^{1-\sqrt{x}} + C$$

Oppgave 3.

(a) Vi regner ut den deriverte til funksjonen

$$f(x) = \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{e^u}{\sqrt{x}}$$

ved å først bruke brøkregelen, og så kjerneregelen med kjerne $u = 1 - \sqrt{x}$ og $u' = -1/(2\sqrt{x})$. Dette gir at

$$f'(x) = \frac{(e^u\cdot u')\cdot\sqrt{x} - e^u\cdot 1/(2\sqrt{x})}{x} = \frac{e^u\cdot(-\sqrt{x}) - e^u\cdot 1}{2x\sqrt{x}} = \frac{e^{1-\sqrt{x}}(-\sqrt{x}-1)}{2x\sqrt{x}}$$

Vi har forenklet brøkuttrykket ved å multiplisere med $2\sqrt{x}$ i teller og nevner.

(b) Vi tar utgangspunkt i det faktoriserte uttrykket for $f'(x)$ som vi fant i (a). Vi ser at når $x > 0$, så er nevner positiv, faktoren e^u er positiv, og $-\sqrt{x} - 1$ er negativ. Derfor er $f'(x) < 0$ for $x > 0$, og det betyr at f er avtagende i hele definisjonsområdet. Vi kunne alternativt lage et fortegnsskjema for $f'(x)$ for å se at $f'(x) < 0$ for $x > 0$.

(c) Når $x \to 0^+$ har vi at telleren $e^{1-\sqrt{x}} \to e^1 = e$ og nevneren $\sqrt{x} \to 0^+$. Dermed har vi at

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \infty$$

Når $x \to \infty$ har vi at telleren $e^{1-\sqrt{x}} = e/e^{\sqrt{x}} \to 0$ og nevneren $\sqrt{x} \to \infty$. Dermed har vi at

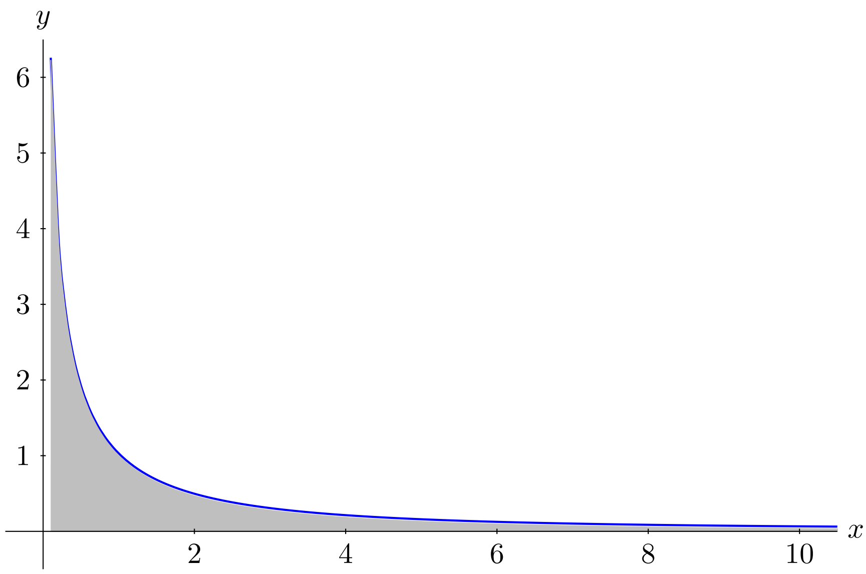
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 0$$

(d) En grov skisse med grafen til f, med området R mellom grafen til f og x-aksen markert, er vist nedenfor. Arealet av det markerte området er gitt ved

$$A(R) = \int_0^\infty f(x)\ \mathrm{d}x = \Big[-2e^{1-\sqrt{x}} + C\Big]_0^\infty = \lim_{b\to\infty}\Big[-2e^{1-\sqrt{x}}\Big]_0^b$$

Her har vi brukt det ubestemte integralet vi fant i Oppgave 2 (c). Dette gir

$$A(R) = \lim_{b\to\infty} -2e^{1-\sqrt{b}} + 2e^{1-0} = 2e$$



Oppgave 4.

(a) Vi finner de partiellderiverte til $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$ og løser så førsteordensbetingelsene for å finne de stasjonære punktene til f:

$$f'_x = 2x + 2xy^2 = 2x(1 + y^2) = 0$$
$$f'_y = 2y + 2yx^2 = 2y(1 + x^2) = 0$$

Siden $1+y^2 \geq 1$ og $1+x^2 \geq 1$ for alle x,y, gir dette at $2x = 2y = 0$, og de stasjonære punktene er $(x,y) = (0,0)$.

(b) Vi finner Hesse-matrisen ved å regne ut de andreordens partiellderiverte til f, og får at

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2 + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2 + 2x^2 \end{pmatrix}$$

Vi bruker andrederivert-testen for å klassifisere det stasjonære punktet (0,0), og regner ut

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Siden determinanten til denne matrisen er $AC - B^2 = 4 > 0$ og koeffisientene $A = 2$ og $C = 2$ på diagonalen er positive, er (0,0) et lokalt minimum for f.

(c) Vi fant i (a) og (b) at f kun har ett stasjonært punkt (0,0), som er et lokalt minimumspunkt. Dermed har f ikke noe globalt maksimum, og (0,0) er eneste kandidat til globalt minimum. Siden $f(0,0) = 1$ og $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 \geq 1$ for alle (x,y), er (0,0) et globalt minimum for f med minimumsverdi $f_{\min} = f(0,0) = 1$.

(d) Vi bruker Lagranges metode for å finne kandidater for maksimum, og ser derfor på Lagrange-funksjonen

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = x^2 + y^2 + x^2y^2 - \lambda(x^2 + 2y^2)$$

Vi skriver ned Lagrange-betingelsene FOC+C (førsteordensbetingelser og bibetingelse):

$$\mathcal{L}'_x = 2x + 2xy^2 - \lambda \cdot 2x = 0$$
$$\mathcal{L}'_y = 2y + 2yx^2 - \lambda \cdot 4y = 0$$
$$x^2 + 2y^2 = 5$$

Vi skriver de to første likningene som

$$2x(1 + y^2 - \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ eller } 1 + y^2 = \lambda$$
$$2y(1 + x^2 - 2\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ eller } 1 + x^2 = 2\lambda$$

Vi ser dermed at det er fire muligheter:

(a) Hvis $x = y = 0$, så gir det en motsigelse i bibetingelsen $x^2+2y^2 = 5$. Ingen kandidatpunkter i dette tilfellet.

(b) Hvis $x = 0$ og $1 + x^2 = 2\lambda$, så er $\lambda = 1/2$ og bibetingelsen gir $2y^2 = 5$, eller $y = \pm\sqrt{5/2}$. Disse kandidatpunktene har $f = 5/2$.

(c) Hvis $y = 0$ og $1 + y^2 = \lambda$, så er $\lambda = 1$ og bibetingelsen gir $x^2 = 5$, eller $x = \pm\sqrt{5}$. Disse kandidatpunktene har $f = 5$.

(d) Hvis $1 + y^2 = \lambda$ og $1 + x^2 = 2\lambda$, så er $1 + x^2 = 2(1 + y^2)$ ved eliminasjon av λ. Dette gir $x^2 = 1 + 2y^2$, og bibetingelsen gir da

$$x^2 + 2y^2 = 1 + 2y^2 + 2y^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad 4y^2 = 4$$

Dette gir $y^2 = 1$, eller $y = \pm 1$, og $x^2 = 3$, eller $x = \pm\sqrt{3}$. Dessuten er $\lambda = 1 + y^2 = 2$. Vi får kandidatpunktene $(x,y;\lambda) = (\pm\sqrt{3}, \pm 1; 2)$ med $f = 3 + 1 + 3 = 7$.

Siden bibetingelsen $x^2 + 2y^2 = 5$ er en ellipse med halvakser $a = \sqrt{5}$ og $b = \sqrt{5/2}$, er mengden av tillatte punkter begrenset. Dermed har vi et maksimum i Lagrange-problemet. Det er ingen tillatte punkter med degenerer bibetingelse, siden $g(x,y) = x^2 + 2y^2$ har $g'_x = 2x$ og $g'_y = 4y$, og $g'_x = g'_y = 0$ kun holder i punktet $(0,0)$, som ikke er tillatt (det ligger ikke på ellipsen). Dermed er $f_{\text{max}} = 7$, siden kandidatpunktene $(x,y;\lambda) = (\pm\sqrt{3}, \pm 1; 2)$ har $f = 7$ og er kandidatpuntene med størst verdi.