Eksamen	MET 11803 Matematikk for siviløkonomer
Dato	18. desember 2017 kl 1400 - 1900

Eksamensoppgaven består av 16 delspørsmål med samme vekt, som har maksimal score 6p hver og totalt har maksimal score 96p (100%). I tillegg inneholder eksamensoppgaven et bonus-spørsmål som man ikke trenger besvare, men som kan gi opptil 6p ekstra.

Alle svar skal begrunnes. Det blir lagt vekt på om presentasjonen av framgangsmåte og resultat er klar og presis når besvarelsen evalueres.

Oppgave 1.

Vi betrakter det lineære likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når matrisen A og vektorene $\mathbf{x}$ og $\mathbf{b}$ er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & a \\ a & 3 & 2 \\ -a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ a \end{pmatrix}$$

Vi betrakter a som en parameter og x,y,z som variable.

(a) **(6p)** Bruk Gauss-eliminasjon til å løse det lineære systemet når $a = 1$.
(b) **(6p)** Finn A^{-1} når $a = 1$, og bruk A^{-1} til å løse det lineære systemet i dette tilfellet.
(c) **(6p)** Bestem a slik at det lineære systemet har eksakt én løsning.
(d) **(6p)** Anta at a er slik at det lineære systemet har eksakt én løsning (x,y,z). Finn et uttrykk $y = y(a)$ for y-koordinaten til løsningen ved å bruke Cramers regel.

Oppgave 2.

Regn ut integralene:

$$\text{(a) } \mathbf{(6p)} \int \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(b) } \mathbf{(6p)} \int \frac{e^x + e^{-x}}{2e^x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(c) } \mathbf{(6p)} \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Oppgave 3.

Vi betrakter funksjonen $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ definert for $x > 0$.

(a) **(6p)** Finn eventuelle maksimums- og minimumsverdier for f, hvis de eksisterer.
(b) **(6p)** Tegn en grov skisse av området R i første kvadrant avgrenset av grafen til f og x-aksen på intervallet $[1,\infty)$. Er arealet til området R endelig?

Oppgave 4.

Vi betrakter funksjonen

$$f(x,y) = x^2y^2 + xy + x - y$$

(a) **(6p)** Regn ut de første ordens partiellderiverte og Hessematrisen til f.
(b) **(6p)** Vis at nivåkurven $f(x,y) = 2$ skjærer linjen $y = x$ i to punkter (a,a) og (b,b).
(c) **(6p)** Finn tangenten til nivåkurven $f(x,y) = 2$ i punktene (a,a) og (b,b).
(d) **(6p)** Finn eventuelle stasjonære punkter for f, og klassifisér disse som lokale maksima, lokale minima eller sadelpunkt.

Oppgave 5.

Vi betrakter Lagrange-problemet

$$\min f(x,y) = xy \quad \text{når} \quad x^2 + 4y^2 = 4$$

(a) **(6p)** Lag en skisse av kurven gitt ved $x^2+4y^2 = 4$, og avgjør om dette er en begrenset mengde.
(b) **(6p)** Skriv ned Lagrange-betingelsene, og finn alle $(x,y;\lambda)$ som oppfyller disse betingelsene.
(c) **(6p)** Løs Lagrange-problemet.

Vi endrer bibetingelsen i Lagrange-problemet til $x^2 + 4y^2 = 5$.

(d) **Bonus (6p)** Gi en tolkning av Lagrangemultiplikatoren i et Lagrange-problem, og bruk denne tolkningen til å estimere minimumsverdien til det nye Lagrange-problemet.