Eksamen	MET 11803 Matematikk for siviløkonomer
Dato	30. mai 2017 kl 0900 - 1400

Eksamensoppgaven består av 16 delspørsmål med samme vekt, som har maksimal score 6p hver og totalt har maksimal score 96p (100%). I tillegg inneholder eksamensoppgaven et bonus-spørsmål som man ikke trenger besvare, men som kan gi opptil 6p ekstra. **Alle svar skal begrunnes.**

Oppgave 1.

Vi betrakter det lineære likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når matrisen A og vektorene $\mathbf{x}$ og $\mathbf{b}$ er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 1-a \\ 2 & 1+a & 2 \\ 1-a & 2 & 1+a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3+a \\ a^2 \\ 3-a \end{pmatrix}$$

Vi betrakter a som en parameter og x,y,z som variable.

(a) **(6p)** Bruk Gauss-eliminasjon til å løse det lineære systemet når $a = 1$.
(b) **(6p)** Finn A^{-1} når $a = 1$, og bruk A^{-1} til å løse det lineære systemet i dette tilfellet.
(c) **(6p)** Bestem a slik at det lineære systemet har eksakt én løsning.
(d) **(6p)** Bestem a slik at det lineære systemet ikke har noen løsninger.

Oppgave 2.

Regn ut integralene:

$$\text{(a) } \textbf{(6p)} \int_0^1 \frac{3}{(2-x)^4}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(b) } \textbf{(6p)} \int \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(c) } \textbf{(6p)} \int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Oppgave 3.

Vi betrakter funksjonen $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ definert for $x > 0$.

(a) **(6p)** Finn eventuelle maksimums- og minimumsverdier for f, hvis de eksisterer.
(b) **(6p)** Tegn en grov skisse av området R i første kvadrant begrenset av grafen til f, x-aksen og $x = 1$, og regn ut arealet til dette området.

Oppgave 4.

Vi betrakter funksjonen

$$f(x,y) = \frac{2x + 3y - 6}{xy}$$

(a) **(6p)** Regn ut f'_x og f'_y, og finn eventuelle stasjonære punkter for f.
(b) **(6p)** Klassifisér de stasjonære punktene som lokale maksima, lokale minima eller sadelpunkt.
(c) **(6p)** Finn eventuelle maksimums- og minimumsverdier for f.
(d) **(6p)** Vis at nivåkurven $f(x,y) = 5$ skjærer linjen $y = 1$ i ett punkt, og finn tangenten til nivåkurven i dette punktet.

Oppgave 5.

Vi betrakter Lagrange-problemet

$$\max / \min f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 - 4y^3 \quad \text{når} \quad x^2 + y^2 = 25$$

(a) **(6p)** Lag en skisse av kurven gitt ved $x^2+y^2 = 25$, og avgjør om dette er en begrenset mengde.
(b) **(6p)** Skriv ned Lagrange-betingelsene, og finn alle $(x,y;\lambda)$ som oppfyller disse betingelsene.
(c) **(6p)** Løs Lagrange-problemet.

Vi endrer bibetingelsen i Lagrange-problemet til $x^2 + y^2 = 26$.

(d) **Bonus (6p)** Estimer maksimums- og minimumsverdien til det nye Lagrange-problemet.

Formelsamling

1 Finansmatematikk

Geometriske rekker. En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier. Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er henholdsvis

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

2 Integrasjon

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, \mathrm{d}x = uv - \int uv' \, \mathrm{d}x$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \, \mathrm{d}x = \int f(u) \, \mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \mathrm{d}x$$

Areal. Regionen gitt ved $f(x) \leq y \leq g(x)$ for $a \leq x \leq b$ har areal

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, \mathrm{d}x$$

3 Lineær algebra

Cramers regel. Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \ldots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ er matrisen som framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med $\mathbf{b}$.

4 Funksjoner i flere variable

Annenderivert-testen. Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x,y)$ er et

a) lokalt minimum om $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
b) lokalt maksimum om $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
c) sadelpunkt om $AC - B^2 < 0$

når vi setter $A = f''_{xx}(x^*, y^*)$, $B = f''_{xy}(x^*, y^*)$ og $C = f''_{yy}(x^*, y^*)$.

Nivåkurver. På nivåkurven $f(x,y) = c$ er den deriverte $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gitt ved

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Totalderivasjon. Når $z = f(x,y)$, og vi har $x = x(t)$ og $y = y(t)$, så er den totalderiverte

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$