

Eksamensoppgaven består av 16 delspørsmål med samme vekt, som har maksimal score 6p hver og totalt har maksimal score 96p (100%). I tillegg inneholder eksamensoppgaven et bonus-spørsmål som man ikke trenger besvare, men som kan gi opptil 6p ekstra. **Alle svar skal begrunnes.**

OPPGAVE 1.

Vi betrakter det lineære likningssystemet  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  når matrisen  $A$  og vektorene  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{b}$  er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} -2 & t & 1 \\ 1 & -2 & t \\ t & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} t+5 \\ 3 \\ t-10 \end{pmatrix}$$

Vi betrakter  $t$  som en parameter og  $x, y, z$  som variable.

- (a) **(6p)** Løs det lineære systemet når  $t = 1$ . Hvor mange frihetsgrader har systemet?
- (b) **(6p)** Regn ut  $|A|$  for en generell verdi av  $t$ .
- (c) **(6p)** Finn  $A^{-1}$  når  $t = 0$ , og bruk  $A^{-1}$  til å løse det lineære systemet i dette tilfellet.
- (d) **(6p)** For hvilke verdier av  $t$  har det lineære systemet eksakt én løsning? Finn  $x$  i disse tilfellene.

OPPGAVE 2.

Vi betrakter funksjonen  $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$ ,  $x \neq -1$ .

- (6p)** Regn ut  $f'(x)$  og  $f''(x)$ . Er  $f$  konveks? Er  $f$  konkav?

OPPGAVE 3.

Regn ut de ubestemte integralene:

- (a) **(6p)**  $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx$
- (b) **(6p)**  $\int 12x^2 \ln(1-x) dx$
- (c) **(6p)**  $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

Området  $R$  er begrenset av grafen til  $f(x) = e^{1-x}$  og linjene  $x = 1$  og  $y = 3$ .

- (d) **(6p)** Tegn en skisse av  $R$  og regn ut arealet av dette området.

OPPGAVE 4.

Vi betrakter funksjonen

$$f(x, y) = 23 - 4x^2 - 9y^2 - 8x + 18y$$

- (a) **(6p)** Regn ut  $f'_x$  og  $f'_y$ , og finn eventuelle stasjonære punkter for  $f$ .
- (b) **(6p)** Klassifiser de stasjonære punktene som lokale maksima, lokale minima eller sadelpunkt.
- (c) **(6p)** Finn den lineære approksimasjonen til  $f$  i punktet  $(x, y) = (1, 0)$ .
- (d) **(6p)** Finn eventuelle maksimums- og minimumsverdier for  $f$ .

OPPGAVE 5.

Vi betrakter Lagrange-problemet

$$\max / \min f(x,y) = 36 - 4x^2 - 9y^2 \quad \text{når} \quad xy = 4$$

- (a) **(6p)** Finn punktene på nivåkurven  $xy = 4$  der tangenten har stigningstall  $y' = -2$ .
- (b) **(6p)** Tegn en skisse av  $D = \{(x,y) : xy = 4\}$ . Er  $D$  begrenset? Hva slags kurve er dette?
- (c) **(6p)** Finn kandidater for maksimum og minimum ved hjelp av Lagrange's metode.
- (d) **Bonus (6p)** Finn maksimum og minimum i Lagrange-problemet.