BI HANDELSHØYSKOLEN

Sensorveiledning:	**MET 11803**	**Matematikk**			
Eksamensdato:	08.05.2014	kl.	09.00-14.00	Totalt antall sider:	8
Se oppgavesettet for tillatte hjelpemidler					
Se oppgavesettet for vekting av oppgavene					
Ansvarlig institutt: Institutt for samfunnsøkonomi					

Oppgave 1

a. $\int(x^3+5x\sqrt{x})dx = \int(x^3+5x^{\frac{3}{2}})dx = \frac{1}{4}x^4+5\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+K = \frac{1}{4}x^4 + 2x^{\frac{5}{2}} + K$

b. Substitusjon $u = x^2 + 1$, det gir $du = 2xdx$.

$\int \frac{5x}{x^2+1}dx = \int \frac{5x}{u}\frac{du}{2x} = \frac{5}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{5}{2}\ln|u| + K = \frac{5}{2}\ln(x^2+1) + K$

c. $\int_1^2 x^3\ln(3x)dx = \int_1^2 x^3\ln(3) + x^3\ln x)dx = I_1 + I_2$. Vi tar disse to integralene separat:

$I_1 = \int_1^2 x^3\ln(3)dx = \ln 3\int_1^2 x^3dx = \ln 3\Big|_1^2\frac{1}{4}x^4 = \frac{\ln 3}{4}(2^4 - 1^4) = \frac{15\ln 3}{4}$

$I_2 = \int_1^2 x^3\ln x dx = \Big|_1^2\frac{1}{4}x^4\ln x - \int_1^2 \frac{1}{4}x^4\cdot\frac{1}{x}dx = \Big|_1^2\frac{1}{4}x^4\ln x - \int_1^2 \frac{1}{4}x^3dx = \Big|_1^2\frac{1}{4}x^4\ln x - \Big|_1^2\frac{1}{16}x^4 = \frac{1}{4}2^4\ln 2 - \frac{1}{16}(2^4-1) = 4\ln 2 - \frac{15}{16}$

$I = I_1 + I_2 = \frac{15\ln 3}{4} + 4\ln 2 - \frac{15}{16}$

d. Siden graden i nevner er høyere enn i teller må vi starte med polynomdivisjon:

Poly inn

$x^3 : (x^2+5x+4) : x-5$

$-(x^3+5x^2+4x)$

$-5x^2+4x$

$-(-5x^2-25x-20)$

$+21x+20$

Det blir $x-5$ med $21x+20$ som rest. Delbrøksoppspalting: $21x+20 = A(x+1) + B(x+4)$. $x = -1$ gir $-1 = 3B$. $B = -\frac{1}{3}$. $x = -4$ gir $-84+20 = -3A$. $A = \frac{64}{3}$.

Integralet blir derfor:

$\int \frac{x^3}{x^2+5x+4}dx = \int x-5+\frac{64}{3}\cdot\frac{1}{x+4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{64}{3}\ln|x+4| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + K$

e. Området ser slik ut:

Skjæringspunktene finner vi ved å løse: $2 - x^2 = x$. Med andre ord $x^2 + x - 2 = 0$, eller $(x+2)(x-1) = 0$ Det gir $x = -2$ og $x = 1$.

Areal $= \int_{-2}^{1}(2 - x^2 - x)dx = \Big|_{-2}^{1} 2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 2(1-(-2)) - \frac{1}{3}(1^3 - (-2^3)) - \frac{1}{2}(1^2 - (-2^2)) = 6 - \frac{1}{3}(9) - \frac{1}{2}(-3) = \frac{9}{2}$.

Oppgave 2

a. Grensekostnad: $K'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Altså må vi løse $\frac{2x}{x^2+1} = 1$. Det gir $x^2 + 1 = 2x$, eller $x^2 - 2x + 1 = 0$. Med andre ord $(x-1)^2 = 0$. Vi får $x = 1$.

b. $\pi(x) = x - K(x)$. Det gir $\pi'(x) = 1 - K'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$. Dette er utrykket er null for $x = 1$, men det bytter ikke fortegn. Profitten stiger med x. Det betyr at profittmaks er for endepunktet $x = 100$:

$\pi(100) = 100 - K(100) = 100 - \ln 10001$

Oppgave 3

a. $L = \sqrt{x} + 3\sqrt{y} - \lambda(2x + y - 3)$

Det gir

I. $L'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \lambda \cdot 2 = 0$. Det vil si $\lambda = \frac{1}{4\sqrt{x}}$.

II. $L'_y = \frac{3}{2\sqrt{y}} - \lambda = 0$. Det vil si $\frac{3}{2\sqrt{y}} = \lambda = \frac{1}{4\sqrt{x}}$.

Altså er $\sqrt{y} = 6\sqrt{x}$, som gir $y = 36x$ Vi setter inn i bibetingelsen $2x + 36x = 3$. Det gir at $x = \frac{3}{38}$, som igjen gir $y = \frac{36 \cdot 3}{38} = \frac{108}{38}$.

Simen ønsker å kjøpe $\frac{3}{38}$ kilo loff og $\frac{216}{38}$ liter rødbrus.

(Altså forsvinnende lite loff og nesten alt på rødbrus. Årsaken er lave preferanser for loff, samtidig som loff er dyrt.)

b. $L = 3\sqrt{x} + \sqrt{y} - \lambda(2x + y - 3)$

Det gir

I. $L'_x = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \lambda \cdot 2 = 0$. Det vil si $\lambda = \frac{3}{4\sqrt{x}}$.

II. $L'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \lambda = 0$. Det vil si $\frac{1}{2\sqrt{y}} = \lambda = \frac{3}{4\sqrt{x}}$.

Altså er $\frac{\sqrt{y}}{1} = \lambda = \frac{2\sqrt{x}}{3}$, eller $y = \frac{4}{9}x$. Vi setter inn i bibetingelsen $2x + \frac{4}{9}x = 3$. Vi får $x = \frac{27}{22}$ og $y = \frac{4}{9} \cdot \frac{27}{22} = \frac{12}{22}$

Simen ønsker å kjøpe $\frac{27}{22}$ kilo loff og $\frac{12}{22}$ liter rødbrus. Svaret blir ikke det "samme" som i a. Årsaken er at kiloprisen på loff er ikke lik liter prisen på rødbrus, og da hjelper det ikke at nyttefunksjonen i b. er lik nyttefunksjonen i a. med x og y byttet om.

(Etter lynnedslaget er Simen mindre heldig i den forstand at han har preferanser for loff som er relativt dyrere. I den grad en kan sammenlikne kilopris med literpris.)

Oppgave 4

a. $S(n) = a_0\frac{1-r^n}{1-r} = 3x^2\frac{1-(3x^2)^n}{1-3x^2}$

Merk $3x^2 = \frac{1}{3}$ når $x = \frac{1}{3}$.

$S(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n}) = \frac{1}{2}(\frac{3^n-1}{3^n}) = \frac{3^n-1}{2 \cdot 3^n}$

b. Summen eksisterer for $0 \leq 3x^2 < 1$. (x^2 blir aldri negativ).

Det betyr at summen eksisterer for $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vi må løse

$\frac{3x^2}{1-3x^2} = 10$

Det gir $3x^2 = 10 - 30x^2$. M.a.o. $33x^2 = 10$ som gir $x = \pm\sqrt{\frac{10}{33}}$. Siden $\sqrt{\frac{10}{33}} \approx 0,550$, som er mindre enn $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$, er $x = \pm\sqrt{\frac{10}{33}}$ innenfor konvergensradien.

Altså er svaret $x = \pm\sqrt{\frac{10}{33}}$.

Oppgave 5

a. A har en invers hvis og bare hvis $det(A)) \neq 0$. Vi regner ut determinanten ved å utvikle langs første søyle:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = a \cdot 2 - a \cdot 1 = a.$$

Vi får invers for $a \neq 0$.

Inversmatrise for $a = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi erstatter linje2 med linje1-linje2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi erstatter linje1 med linje1 minus 2linje3 og linje3 med linje3-linje2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi erstatter linje1 med linje1-linje3 og linje2 med linje2+2linje3 og ganger linje3 med -1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

b. $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ gir $kof(B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ og $adj(B) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Determinanten til B er $2 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 4$. Det betyr at

$B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

c. $XB - 2I = B^2$ gir at $XB = B^2 + 2I$. Vi får $X = B + 2B^{-1}$ (ved å gange med B^{-1} fra høyre på begge sider). Siden $B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, får vi:

$X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{4} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$

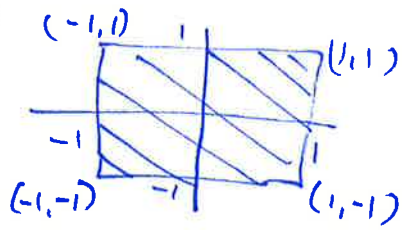
Oppgave 6

a. Siden $f'_x(x, y) = 2x + y$ og $f'_y(x, y) = x + y^2)$ får vi:

I. $2x + y = 0$ som gir $y = -2x$

II. $x + y^2 = 0$, vi setter inn $y = -2x$ og får $x + 4x^2 = x(1 + 4x) = 0$. Altså $x = 0$ som gir $y = 0$ og $x = -\frac{1}{4}$ som gir $y = \frac{1}{2}$

b. Figur:



c. Vi har funnet to kandidater på det indre allerede:

$(x, y) = (0, 0)$, som gir $f(0, 0) = 0$.

$(x, y) = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, som gir $f(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{4})^2 + (-\frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3}\frac{1}{8} = (\frac{1}{16}(1 - 2 + \frac{2}{3}) = -\frac{1}{48}$.

Vi må undersøke kanter og hjørner.

$f(x,y) = x^2 + xy + \frac{1}{3}y^3$

Hjørner:

$(1,1)$ gir $f(1,1) = 1^2 + 1 \cdot 1 + \frac{1}{3}1^3 = \frac{7}{3}$

$(1,-1)$ gir $f(1,1) = 1^2 + 1 \cdot (-1) + \frac{1}{3}(-1)^3 = -\frac{1}{3}$

$(-1,1)$ gir $f(1,1) = (-1)^2 + (-1) \cdot 1 + \frac{1}{3}1^3 = \frac{1}{3}$

$(-1,-1)$ gir $f(1,1) = (-1)^2 + (-1) \cdot (-1) + \frac{1}{3}(-1)^3 = \frac{5}{3}$

Sidekanter:

$x = 1$ gir $f(1,y) = 1^2 + 1 \cdot y + \frac{1}{3}y^3 = 1 + y + \frac{1}{3}y^3$.

Den deriverte lik null: $f'(1,y) = 1 + y^2 = 0$. Siden $1 + y^2 > 0$, får vi ingen kandidater.

$x = -1$ gir $f(1,y) = (-1)^2 + (-1) \cdot y + \frac{1}{3}y^3 = 1 - y + \frac{1}{3}y^3$.

Den deriverte lik null: $f'(1,y) = -1 + y^2 = 0$. Det vil si $y = \pm 1$. Dette svarer til hjørner vi allerede har med.

$y = 1$ gir $f(x,1) = x^2 + x \cdot 1 + \frac{1}{3}1^3 = x^2 + x + \frac{1}{3}$.

Den deriverte lik null: $f'(x,1) = 2x + 1 = 0$. Det vil si $x = -\frac{1}{2}$.

$(-\frac{1}{2}, 1)$ gir $f(-\frac{1}{2}, 1) = (-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2}) \cdot 1 + \frac{1}{3}1^3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

$y = -1$ gir $f(x,1) = x^2 + x \cdot (-1) + \frac{1}{3}(-1)^3 = x^2 - x - \frac{1}{3}$.

Den deriverte lik null: $f'(x,-1) = 2x - 1 = 0$. Det vil si $x = \frac{1}{2}$.

$(\frac{1}{2}, -1)$ gir $f(1,1) = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2}) \cdot (-1) + \frac{1}{3}(-1)^3 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{7}{12}$

Altså blir:

Globalt maks: $\frac{7}{3}$

Globalt min: $-\frac{7}{12}$

d. Funksjonen har ikke noe globalt maks siden $\lim_{x\to\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty$.

Funksjonen har ikke noe globalt min siden $\lim_{y\to-\infty} f(0,y) = \lim_{y\to-\infty} \frac{y^3}{3} = -\infty$.

Oppgave 7

Forsikringsselskap:

Nåverdi 1500 kroner hver tredje måned resten av livet. Vi regner første utbetaling med en gang: $S = \frac{A}{r} = \frac{1500}{0{,}01} = 150\ 000$ kr.

Ola Kåre:

Siden han vil ha utbetalinger hvert år, må vi ha årsrenten. Årsrente $r = (1 + 0,01)^4 - 1 = 0,04060401$

Fra formelen

$S = A(1 + r)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$

får vi

$A = S\frac{r}{(1+r)(1-(1+r)^{-n})} = 150000\frac{0{,}04060401}{(1+0{,}04060401)(1-(1+0{,}04060401)^{-4})} \approx 37\ 767,62$ kr.

(Regning med avrundet verdi $r = 0,0406$, gir $A \approx 39\ 767,40$)