Løsning	MET 1180 Matematikk for siviløkonomer
Dato	18. desember 2025 kl 0900 - 1400

Oppgave 1.

(a) Vi skriver ned den utvidede matrisen $(A|\mathbf{0})$ til det lineære systemet, og gjør elementære radoperasjoner til vi finner en trappeform:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 8 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Siden den siste kolonnen er en null-kolonne, og vi har pivotposisjoner i kolonne 1, 2 og 4, er x_3 og x_5 fri, og det er to frihetsgrader og uendelig mange løsninger. Vi bruker parametrene $x_3 = s$ og $x_5 = t$, og baklengs substitusjon: Fra tredje likning får vi $x_4 - 4t = 0$, eller $x_4 = 4t$. Fra andre likning finner vi $-5x_2 + 5s - 2(4t) - 7t = 0$, eller $x_2 = s - 3t$. Den første likningen gir $x_1 + 3(s - 3t) + s + 2(4t) + 4t = 0$, eller $x_1 = -4s - 3t$. Løsningene til det lineære systemet kan dermed skrives

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4s - 3t \\ s - 3t \\ s \\ 4t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der s,t er parametre som svarer til frie variabler.

(b) For å løse det lineære systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ser vi på trappeformen til den utvidede matrisen $(A|\mathbf{b})$: De første fem kolonnene er uendret, og for alle tre rader har vi pivotposisjon i de første fem kolonnene. Derfor blir det fortsatt uendelig mange løsninger og to frihetsgrader for alle vektorer $\mathbf{b}$.

Oppgave 2.

(a) Vi skriver $\sqrt{x}/x^2 = x^{1/2}/x^2 = x^{-3/2}$ og bruker potensregelen:

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 x^{-3/2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-1/2}}{(-1/2)}\right]_1^4 = \left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_1^4 = -\frac{2}{2} + \frac{2}{1} = 2 - 1 = 1$$

(b) Faktoriseringen $x^2 - 5x - 6 = (x-6)(x+1)$ av nevner kan brukes til å finne en delbrøksoppspaltning:

$$\frac{7}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-6} + \frac{B}{x+1} \quad \Rightarrow \quad 7 = A(x+1) + B(x-6)$$

Dette gir $(A+B)x + (A-6B) = 7$, og dermed $A + B = 0$ og $A - 6B = 7$. Vi finner at $B = -A$ (fra første likning), og dermed blir $A - 6(-A) = 7A = 7$, det vil si $A = 1$, $B = -1$. Dette gir integralet

$$\int_0^5 \frac{7}{x^2 - 5x - 6}\,\mathrm{d}x = \int_0^5 \frac{1}{x-6} + \frac{-1}{x+1}\,\mathrm{d}x = [\ln|x-6| - \ln|x+1|]_0^5$$
$$= (\ln 1 - \ln 6) - (\ln 6 - \ln 1) = -2\ln 6 \approx -3.58$$

(c) Vi bruker delvis integrasjon med $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ og $v = \ln x$, og dermed $u = \sqrt{x}$ og $v' = 1/x$. Det ubestemte integralet blir da

$$\int \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x}\ln x - \int \sqrt{x}/x\,\mathrm{d}x = \sqrt{x}\ln x - \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \sqrt{x}\ln x - 2\sqrt{x} + C$$

siden $\sqrt{x}/x = x^{1/2}/x = x^{-1/2}$. Det bestemte integralet har dermed verdien

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[\sqrt{x}\ln x - 2\sqrt{x}\right]_1^4 = (2\ln 4 - 4) - (\ln 1 - 2) = 2\ln 4 - 2 \approx 0.77$$

(d) Vi bruker substitusjonen $u = e^x + 1$, med $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$, og får at det ubestemte integralet blir

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{e^x} = \int \frac{1}{u(u-1)}\,\mathrm{d}u$$

siden $u = e^x + 1$ gir $e^x = u - 1$. Faktoriseringen av nevner kan brukes til å finne en delbrøksoppspaltning:

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} \quad\Rightarrow\quad 1 = A(u-1) + B(u) = (A+B)u - A$$

Dette gir $A + B = 0$ og $-A = 1$, eller $A = -1$ og $B = 1$. Dermed blir integralet

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u(u-1)}\,\mathrm{d}u = \int -\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1}\,\mathrm{d}u = -\ln|u| + \ln|u-1| + C$$
$$= \ln|u-1| - \ln|u| + C = \ln(e^x) - \ln(e^x+1) + C = x - \ln(e^x+1) + C$$

Oppgave 3.

(a) Siden avkastning per aksje i hvert av scenariene er gitt ved differansen mellom pris og kjøpspris, blir de gitt ved tabellen nedenfor. Dermed får vi at avkastningene $R_1 = -20x + 40y - 100z$, $R_2 = 50x - 60y + 150z$, $R_3 = 30x + 20y + 50z$.

	A	B	C
Scenario 1	−20	40	−100
Scenario 2	50	−60	150
Scenario 3	30	20	50

(b) Vi løser systemet ved hjelp av Gauss-eliminasjon:

$$\left(\begin{array}{rrr|l} -20 & 40 & -100 & R_1 \\ 50 & -60 & 150 & R_2 \\ 30 & 20 & 50 & R_3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|l} -20 & 40 & -100 & R_1 \\ 0 & 40 & -100 & R_2 + 2.5R_1 \\ 0 & 80 & -100 & R_3 + 1.5R_1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{rrr|l} -20 & 40 & -100 & R_1 \\ 0 & 40 & -100 & R_2 + 2.5R_1 \\ 0 & 0 & 100 & R_3 - 2R_2 - 3.5R_1 \end{array}\right)$$

Setter vi inn at $R_1 = 20.000$ kr, $R_2 = 10.000$ kr, og $R_3 = 70.000$ kr, finner vi trappeformen

$$\left(\begin{array}{rrr|l} -20 & 40 & -100 & 20.000 \\ 0 & 40 & -100 & 60.000 \\ 0 & 0 & 100 & -20.000 \end{array}\right)$$

Baklengs substitusjon gir $100z = -20.000$, eller $z = -200$, $40y + 20.000 = 60.000$, eller $y = 40.000/40 = 1000$, og $-20x + 40.000 + 20.000 = 20.000$, eller $-20x = -40.000$ som gir $x = 2.000$. Det er altså mulig om vi kjøper 2.000 aksjer i selskap A, 1.000 aksjer i selskap B, og −200 aksjer (dvs short-salg av 200 aksjer) i selskap C. Kostprisen på denne aksjeporteføljen blir 100.000 kr siden

$$2.000 \cdot 30 + 1.000 \cdot 80 + (-200) \cdot 200 = 100.000$$

Oppgave 4.

(a) Vi finner de partiellderiverte til funksjonen $f(x,y) = xy^3 - x^3y + 4x^2y - 4xy$ ved å bruke derivasjonsreglene. Dette gir

$$f'_x = y^3 - 3x^2y + 8xy - 4y$$
$$f'_y = 3xy^2 - x^3 + 4x^2 - 4x$$

Vi finner de andrederiverte og Hesse-matrisen til f ved å partiellderivere uttrykkene ovenfor en gang til:

$$H(f) = \begin{pmatrix} -6xy + 8y & 3y^2 - 3x^2 + 8x - 4 \\ 3y^2 - 3x^2 + 8x - 4 & 6xy \end{pmatrix}$$

(b) Vi løser førsteordensbetingelsene $f'_x = f'_y = 0$ for å finne stasjonære punkter for f. Vi ser at y er felles faktor i første likning og x er felles faktor i andre likning. Det gir:

$$f'_x = y(y^2 - 3x^2 + 8x - 4) = 0$$
$$f'_y = x(3y^2 - x^2 + 4x - 4) = 0$$

Siden vi skal finne stasjonære punkter med $x,y \neq 0$, kan vi dele på y og x i de to likningene. Det gir $y^2 - 3x^2 + 8x - 4 = 0$ i første likning, eller $y^2 = 3x^2 - 8x + 4$. Vi setter dette inn i andre likning, som gir

$$3(3x^2 - 8x + 4) - x^2 + 4x - 4 = 8x^2 - 20x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4(8)(8)}}{2(8)}$$

Altså er $x = (20 + 12)/16 = 2$ eller $x = (20 - 12)/16 = 1/2$. Når $x = 2$ blir $y^2 = 0$, og dermed $y = 0$. Når $x = 1/2$ blir $y^2 = 3/4$, og dermed $y = \pm\sqrt{3}/2$. Det er kun de to siste punktene som har $x,y \neq 0$, og vi finner dermed følgende stasjonære punkter med $x,y \neq 0$:

$$(x,y) = (1/2, \pm\sqrt{3}/2)$$

(c) Vi bruker andrederivert-testen, og setter først inn $(x,y) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ i Hessematrisen som vi fant i (a):

$$H(f)(1/2,\sqrt{3}/2) = \begin{pmatrix} 5\sqrt{3}/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

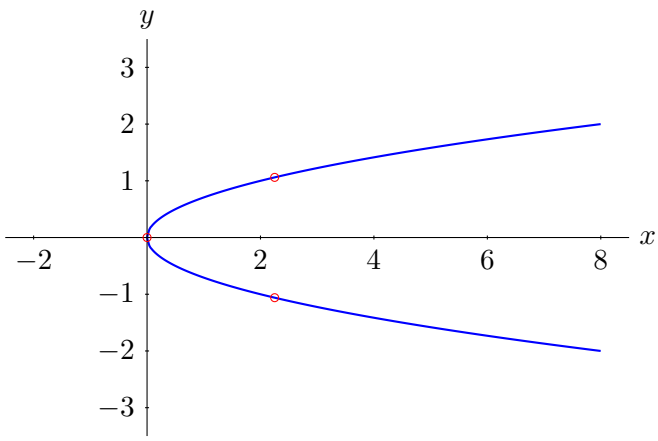
Vi ser at determinanten til denne matrisen er $15 \cdot 3/4 - 9/4 = 9$. Dermed er $(x,y) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ et lokalt minimumspunkt for f. Setter vi inn det andre punktet, får vi

$$H(f)(1/2, -\sqrt{3}/2) = \begin{pmatrix} -5\sqrt{3}/2 & 3/2 \\ 3/2 & -3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Determinanten blir 9, og dermed er $(x,y) = (1/2, -\sqrt{3}/2)$ et lokalt maksimumspunkt for f.

(d) Setter vi for eksempel $y = x$, blir funksjonen f gitt som $f(x,x) = 4x^3 - 4x^2$. Vi ser at $f(x,x) \to \infty$ når $x \to \infty$ og $f(x,x) \to -\infty$ når $x \to -\infty$. Dette betyr at f hverken har en global maksimums- eller minimumsverdi.

Oppgave 5.



(a) Siden bibetingelsen kan skrives $x - 2y^2 = 0$ på standard form, bruker vi Lagranges metode med $\mathcal{L} = y^2 - x^2 + 4x - 4 - \lambda(x - 2y^2)$ for å finne kandidatpunkter. Lagrange-betingelsene er

$$\mathcal{L}'_x = -2x + 4 - \lambda = 0$$
$$\mathcal{L}'_y = 2y - \lambda(-4y) = 0$$
$$x - 2y^2 = 0$$

Andre likning gir $2y(1+2\lambda) = 0$, og dette gir $y = 0$ eller $\lambda = -1/2$. Hvis $y = 0$ gir bibetingelsen $x = 0$, og første likning at $\lambda = 4$. Hvis $\lambda = -1/2$, gir første likning at $-2x + 9/2 = 0$, eller

at $x = 9/4$. Setter vi dette inn i bibetingelsen, får vi at $9/4 = 2y^2$, som gir $y^2 = 9/8$, eller $y = \pm 3/\sqrt{8}$. Dermed finner vi følgende tre kandidatpunkter ved Lagranges metode:

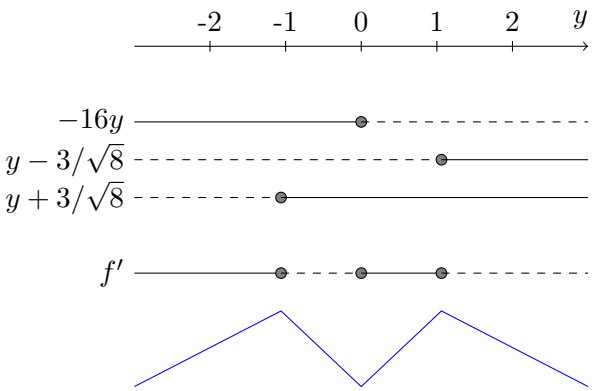
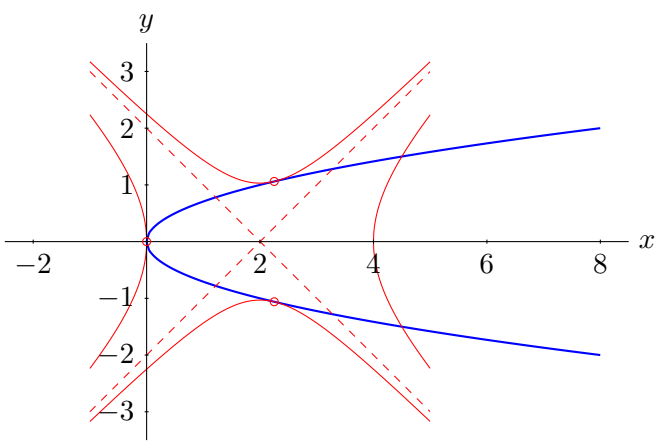
$$(x,y;\lambda) = (0,0;4), (9/4, \pm\, 3/\sqrt{8}; -1/2)$$

(b) Vi kan løse likningen $x = 2y^2$ for y, som gir $y^2 = x/2$, eller $y = \pm\sqrt{x/2}$ når $x \geq 0$. Kurven gitt ved $x = 2y^2$ består derfor av grafene til de to funksjonene $\pm\sqrt{x/2}$ med definisjonsmengde $x \geq 0$. Disse er vist i figuren ovenfor, med de tre punktene fra (a) markert i rødt.

(c) Den enkleste måten å løse oppgaven på, er å substituere $x = 2y^2$ i uttrykket for f, og vi finner da funksjonen

$$f(2y^2,y) = y^2 - (2y^2)^2 + 4(2y^2) - 4 = -4y^4 + 9y^2 - 4$$

Dette er en funksjon i én variabel med derivert $-16y^3 + 18y = -16y(y^2 - 9/8)$. Setter vi den deriverte lik null, får vi $y = 0$ eller $y^2 = 9/8$, som gir $y = \pm 3/\sqrt{8} \approx \pm 1.06$. De stasjonære punktene er altså de samme som vi fant i (a). Vi lager et fortegnsdiagram for den deriverte som vist nedenfor. Siden $y = \pm 3/\sqrt{8}$ gir $f = -4(9/8)^2 + 9(9/8) - 4 = 17/16$, er punktene



$(9/4, \pm 3/\sqrt{8}; -1/2)$ maksimumspunkter, med maksimumsverdi $f_{\max} = 17/16$. Vi ser også fra fortegnslinjen at problemet ikke har noen minimumsverdi siden $y \to \pm\infty$ gir $f \to -\infty$.
Alternativt er det mulig å se på nivåkurvene $f(x,y) = c$ og tegne disse inn i figuren fra (b), se figur nedenfor. For $c = 0$ får vi $y = \pm(x - 2)$, som er vist som de stiplede rette linjene (asymptoter). For $c < 0$ får vi kurver til høyre og til venstre for asymptotene, som for eksempel $f(x,y) = -4$ som er vist på figuren og går gjennom (0,0). Ettersom disse vil skjære $x = 2y^2$ (på høyresiden) når $c \to -\infty$ har ikke problemet noe minimum. For $c > 0$ får vi kurver over og under asymptotene, som $f(x,y) = 17/16$ som er vist på figuren og går gjennom punktene $(9/4, \pm 3/\sqrt{8})$. Siden denne nivåkurven tangerer $x = 2y^2$, vil det ikke bli noen skjæringspunkter om $c > 17/16$, og dermed er $f_{\max} = 17/16$ i de to punktene der nivåkurven tangerer $x = 2y^2$.