

# MET 11807

## Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

**Utlevering:** 29.05.2019 Kl. 09.00

**Innlevering:** 29.05.2019 Kl. 14.00

Vekt: 80% av MET 1180

Antall sider i oppgaven: 4 inkl. forsiden

Innføringsark: Ruter

Tillatte hjelpemidler: BI-definert eksamenskalkulator. Enkel kalkulator.

Eksamensoppgaven består av 15 delspørsmål med samme vekt, som har maksimal score 6p hver og totalt har maksimal score 90p (100%). I tillegg inneholder eksamensoppgaven et bonus-spørsmål som man ikke trenger besvare, men som kan gi opptil 6p ekstra score.

**Alle svar skal begrunnes. Når besvarelsen evalueres, blir det lagt vekt på at framgangsmåte og resultat presenteres så klart, presist og kortfattet som mulig.**

### Oppgave 1.

Vi betrakter det lineære systemet  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , hvor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 2a & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 40 \\ 51 \end{pmatrix}$$

og  $a$  er en parameter.

- (6p) Bruk Gauss-eliminering til å løse det lineære systemet når  $a = 2$ . Marker pivot-posisjonene.
- (6p) Regn ut  $\det(A)$ , og bestem alle verdier av  $a$  slik at  $\det(A) = 0$ .
- (6p) Finn  $A^{-1}$  når  $a = 3$ .
- (6p) Vis at  $A^7 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  har eksakt én løsning for  $a = -1$ , og uttrykk løsningen  $\mathbf{x}$  ved  $A$  og  $\mathbf{b}$ . Det er ikke nødvendig å regne ut løsningen  $\mathbf{x}$  eksplisitt.

### Oppgave 2.

Vi ser på funksjonen definert ved  $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ .

- (6p) Finn asymptotene til  $f$ .
- (6p) Regn ut  $f'(x)$ , og avgjør når  $f$  er avtagende.

### Oppgave 3.

Regn ut disse integralene:

- (6p)  $\int 30(1-x)^5 dx$
- (6p)  $\int \frac{12}{4-9x^2} dx$
- (6p)  $\int \frac{2e^x}{e^x - e^{-x}} dx$

### Oppgave 4.

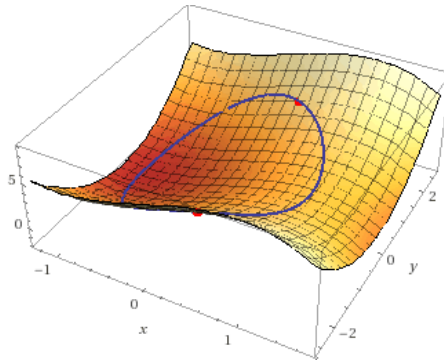
Vi kjøper en eiendom for utleie. Vi regner med å motta netto leieinntekter som en kontinuerlig inntektstrøm, slik at kontantstrømmen etter  $t$  år er gitt ved  $I(t) = 12e^{0.07t}$  (i millioner kroner per år). Vi bruker kontinuerlig diskontering når vi regner nåverdi, med diskonteringsrente  $r = 10\%$ .

- (6p) Finn nåverdien til inntektstrømmen vi mottar om vi leier ut eiendommen i all framtid.
- (6p) Vi vurderer å selge eiendommen etter 7 år dersom nåverdien av salgssummen er minst like stor som nåverdien av framtidige leieinntekter. Hvor stor må salgssummen være for at vi skal vurdere å selge?

### Oppgave 5.

Vi ser på funksjonen definert ved  $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$ , og kaller nivåkurven til  $f$  som går gjennom punktet  $(x,y) = (-1,2)$  for  $C$ .

- (6p) Finn alle stasjonære punkt for  $f$ , og klassifiser disse punktene.
- (6p) Finn tangenten til  $C$  i punktet  $(x,y) = (-1,2)$ . Skjærer tangenten  $C$  i noen andre punkter?
- (6p) Skisser kurven i  $xy$ -planet gitt ved  $4x^2 + y^2 = 4$ . Hva slags kurve er dette? Er den begrenset?
- (6p) Løs optimeringsproblemet:  $\max f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$  når  $4x^2 + y^2 = 4$



FIGUR 1. Illustrasjon for Oppgave 5

### Oppgave 6.

**Bonus (6p)** Løs Lagrangeproblemet:  $\min f(x,y) = x$  når  $y^2 - x^3 + 3x = 2$

# Formelsamling

## 1 Finansmatematikk

**Geometriske rekker.** En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1 - k} \quad \text{når } |k| < 1$$

**Nåverdier.** Nåverdien  $K_0$  til en innbetaling  $K_n$  er henholdsvis

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

## 2 Integrasjon

**Integrasjonsmetoder.**

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \, dx = \int f(u) \, du$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px + q}{(x - a)(x - b)} \, dx = \int \left( \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} \right) \, dx$$

**Areal.** Regionen gitt ved  $f(x) \leq y \leq g(x)$  for  $a \leq x \leq b$  har areal

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx$$

## 3 Lineær algebra

**Cramers regel.** Et lineært system  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  der  $|A| \neq 0$  har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der  $A_i(\mathbf{b})$  er matrisen som framkommer ved å bytte ut kolonne  $i$  fra matrisen  $A$  med  $\mathbf{b}$ .

## 4 Funksjoner i flere variable

**Annenderivert-testen.** Et stasjonært punkt  $(x^*, y^*)$  for funksjonen  $f(x, y)$  er et

- lokalt minimum om  $A > 0$  og  $AC - B^2 > 0$
- lokalt maksimum om  $A < 0$  og  $AC - B^2 > 0$
- sadelpunkt om  $AC - B^2 < 0$

når vi setter  $A = f''_{xx}(x^*, y^*)$ ,  $B = f''_{xy}(x^*, y^*)$  og  $C = f''_{yy}(x^*, y^*)$ .

**Nivåkurver.** På nivåkurven  $f(x, y) = c$  er den deriverte  $y' = dy/dx$  gitt ved

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

**Totalderivasjon.** Når  $z = f(x, y)$ , og vi har  $x = x(t)$  og  $y = y(t)$ , så er den totalderiverte

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$