

MET 11805

Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	21.05.2019	Kl. 09:00
Innlevering:	21.05.2019	Kl. 12:00

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

Midtveiseksamen i MET1180¹ - Matematikk for siviløkonomer

21. mai 2019

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Rett svar	B	D	A	C	A	A	B	D	C	C	C	D	B	B	D

Oppgave 1

Nåverdien (i millioner) er $\frac{40}{1,12^7} = 18,09$ (B).

Oppgave 2

(A) Ved produktregelen er $f'(x) = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = x(x+2)e^x$

(B) Ved brøkregelen er $f'(x) = \frac{(\ln(x))' \cdot x^2 - \ln(x) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$

(C) Ved kjerneregelen og potensregelen er $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(D) Ved brøkregelen er

$$f'(x) = \frac{(x-1)' \cdot (x+2) - (x-1) \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1 \cdot (x+2) - (x-1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$$

så (D) er gal.

Oppgave 3

Vi har $f(x) = \frac{1}{e^x}$ og fordi e^x er større enn 0 for alle x er også $f(x)$ det og (A) er korrekt.

Oppgave 4

Den årlige vekstfaktoren er $1+r$ hvor r er den årlige renten. Vi får likningen $40 \cdot (1+r)^6 = 70$ som har løsningen $r = \left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 9,78\%$ (C).

Oppgave 5

Vi bruker polynomdivisjon og får $f(x) = 4 + \frac{2}{x-10}$ som har vertikal asymptote linjen $x = 10$ og horisontal asymptote linjen $y = 4$ og det passer bare med (A).

Oppgave 6

Vi deler på 144 på begge sider av likning (A) og får den på standardformen $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$. Sentrum i ellipsen er $(x, y) = (1, 2)$ som passer med (A) og (C). Horisontal halvakse er $5 - 1 = 4$ og vertikal halvakse er $5 - 2 = 3$ og det passer blant (A) og (C) bare med (A).

Oppgave 7

Vi setter $u = \sqrt{x}$ og får annengradslikningen $u^2 - 9u + 22 = 0$ som har løsningene $u = -2$ og $u = 11$. Men fordi \sqrt{x} ikke kan være negativ får vi bare løsningen $x = 121$ (B).

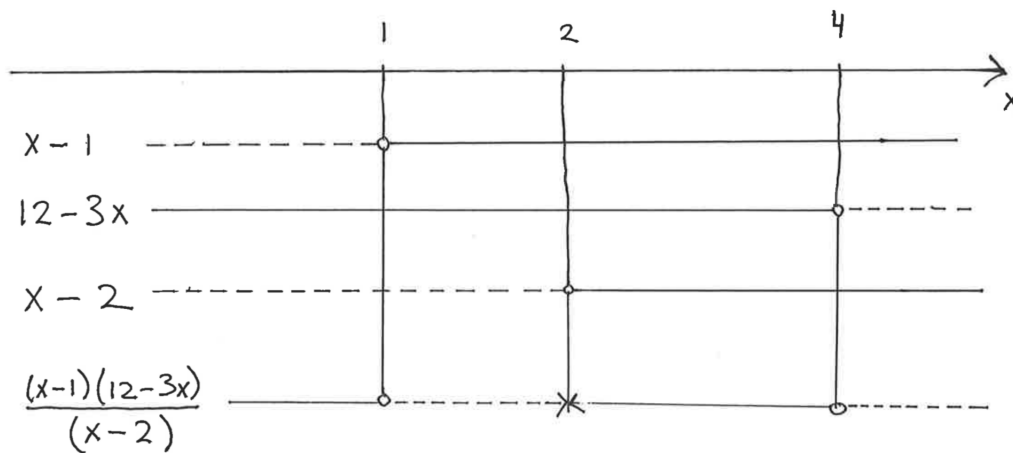
¹Eksamenskoder MET11802 og MET11805

Oppgave 8

Her kan vi tenke vekstfaktor. Hvis renten er 10% vil 1 krone vokse til $1,1^{15}$ på 15 år, men hvis det er halvårlig forrentning vil den på 15 år vokse til noe litt større, nemlig $1,05^{30}$, så (A) er gal. Tilsvarende vil 1 krone med 12% rente vokse til $1,12^{100000}$ på 100 000 år med årlig forrentning, men til litt mer hvis det er forrentning hver 4. måned, nemlig $1,04^{300000}$ så (B) er også gal. Med kontinuerlig forrentning får vi e^{12000} som jo må gi noe mer enn årlig forrentning ($1,12^{100000}$) så (C) er gal, og litt mer enn forrentning hver 4. måned så (D) er rett.

Oppgave 9

Siden vi har 0 på høyre side og teller og nevner i brøken er ferdig faktorisert kan vi bruke fortegnsskjema direkte:



Figur 1: Fortegnsskjema

og dermed ser vi at (C) er riktig.

Oppgave 10

Vi deriverer to ganger og får

- (A) $K(0) = 1200 > 0$, $K'(x) = 0,01 \geq 0$, $K''(x) = 0 \geq 0$ så ok.
- (B) $K(0) = 800e^{-0,3} > 0$, $K'(x) = 80e^{0,1(x-3)} \geq 0$, $K''(x) = 8e^{0,1(x-3)} \geq 0$ så ok.
- (C) $K(0) = 1000 \cdot \ln(50) > 0$, $K'(x) = \frac{2000x}{x^2+50} \geq 0$,

$$K''(x) = \frac{(2000x)' \cdot (x^2 + 50) - 2000x \cdot (x^2 + 50)'}{(x^2 + 50)^2} = \frac{2000 \cdot (x^2 + 50) - 2000x \cdot 2x}{(x^2 + 50)^2}$$

$$= \frac{2000x^2 + 100000 - 4000x^2}{(x^2 + 50)^2} = \frac{-2000(x^2 - 50)}{(x^2 + 50)^2}$$

som er negativ for $x > \sqrt{50}$. $K(x)$ er altså ikke en kostnadsfunksjon.

- (D) $K(0) = 900 > 0$, $K'(x) = 0,01x + 0,1 \geq 0$, $K''(x) = 0,01 \geq 0$ så ok.
- Svaret er derfor (C).

Oppgave 11

Elastisiteten er gitt som $\varepsilon(p) = \frac{D'(p) \cdot p}{D(p)} = \frac{-2p}{100-2p}$. Etterspørselen er elastisk med hensyn på prisen når $\varepsilon(p) < -1$, dvs $\frac{-2p}{100-2p} < -1$, dvs $\frac{100-4p}{100-2p} < 0$ som med fortegnsskjema gir $25 < p < 50$ (C).

Oppgave 12

- (A) Linjen $x = 0$ er en (ensidig) vertikal asymptote for $\ln(x)$.
- (B) Vi har $x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x + 1)$ så linjene $x = -5$ og $x = -1$ er vertikale asymptoter for $\frac{1}{x^2+6x+5}$.
- (C) Linjen $x = -2,5$ er en vertikal asymptote for $\frac{x-3}{2x+5}$.
- (D) Fordi $x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 \geq 1$ for alle x har ikke $\frac{e^x}{x^2-6x+10}$ noen vertikal asymptote. Svaret er derfor (D).

Oppgave 13

- (A) Fordi $f''(x) \geq 0$ for x mellom 5 og 8 er $f(x)$ er konveks i dette intervallet.
 - (B) Vi ser at stigningstallet til tangenten til grafen til $f''(x)$ er negativt for x mellom 7 og 10, dvs $(f'(x))' = f''(x) \leq 0$ i dette intervallet og $f'(x)$ er derfor konkav her.
 - (C) Fordi $(f'(x))' = f''(x) \leq 0$ for x mellom 2 og 5 er $f'(x)$ avtagende her og dermed $f'(2) > f'(5)$.
 - (D) $f(x)$ kan, men må ikke, være avtagende for x mellom 2 og 3. Man kan ha et førstegradsledd ax i $f(x)$ med a veldig stor slik at $f(x)$ er voksende mellom 2 og 3 uten at dette merkes på den annenderiverte til $f(x)$ fordi $(ax)'' = 0$.
- Svaret er altså (B).

Oppgave 14

Vi finner nullpunktene:

- (A) $x = r$, $x = r + 4$ og $x = r - 3$ så her er r den midterste roten og de to andre ligger der de skal.
 - (B) $x = t$, $x = t - 3$ og $x = t - 7$ så her er t den største roten, men den midterste ligger 3 nedenfor, ikke 4 nedenfor slik den skal.
 - (C) $x = k$, $x = k + 3$ og $x = k + 7$ så her er k den minste roten og de to andre ligger der de skal.
 - (D) $x = s - 1$, $x = s + 2$ og $x = s + 6$ så her er s en større enn den minste roten og de to andre ligger der de skal.
- Svaret er altså (B).

Oppgave 15

Hvis funksjonen er strengt voksende eller strengt avtagende i hele sitt definisjonsområde har den en omvendt funksjon, ellers ikke. Vi finner derfor

$$f'(x) = \frac{(5x - 3)' \cdot (x - 1) - (5x - 3) \cdot (x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{5 \cdot (x - 1) - (5x - 3) \cdot 1}{(x - 1)^2} = -\frac{2}{(x - 1)^2}$$

som vi ser er negativ for alle $x > 1$. Altså er $f(x)$ strengt avtagende for $x > 1$ og har en omvendt funksjon $g(x)$. Definisjonsmengden til $g(x)$ er lik verdimengden til $f(x)$ og for å finne den bruker vi polynomdivisjon og får $f(x) = 5 + \frac{2}{x-1}$. Dette er standardformen til en hyperbelfunksjon med

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 5 + \frac{2}{x-1} = \infty \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \frac{2}{x-1} = 5^+ \quad (\text{dvs } f(x) \text{ nærmer seg } 5 \text{ ovenfra})$$

og ved skjæringssetningen får vi alle mellomliggende verdier. Dette betyr at $D_g = V_f = \langle 5, \infty \rangle$, dvs (D).