EKSAMENSOPPGAVE - Skriftlig eksamen

MET 11803
Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	29.05.2019	Kl. 09.00
Innlevering:	29.05.2019	Kl. 14.00
Vekt:	70% av MET 1180	
Antall sider i oppgaven:	4 inkl. forsiden	
Innføringsark:	Ruter	
Tillatte hjelpemidler:	BI-definert eksamenskalkulator. Enkel kalkulator.	
Kontinuasjonstype	Siste kontinuasjon	

Eksamen	MET 11803 Matematikk for siviløkonomer
Dato	29. mai 2019 kl 0900 - 1400

Eksamensoppgaven består av 15 delspørsmål med samme vekt, som har maksimal score 6p hver og totalt har maksimal score 90p (100%). I tillegg inneholder eksamensoppgaven et bonus-spørsmål som man ikke trenger besvare, men som kan gi opptil 6p ekstra score.

Alle svar skal begrunnes. Når besvarelsen evalueres, blir det lagt vekt på at framgangsmåte og resultat presenteres så klart, presist og kortfattet som mulig.

Oppgave 1.
Vi betrakter det lineære systemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 2a & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 40 \\ 51 \end{pmatrix}$$

og a er en parameter.

a) **(6p)** Bruk Gauss-eliminasjon til å løse det lineære systemet når $a = 2$. Marker pivot-posisjonene.

b) **(6p)** Regn ut $\det(A)$, og bestem alle verdier av a slik at $\det(A) = 0$.

c) **(6p)** Finn A^{-1} når $a = 3$.

d) **(6p)** Vis at $A^7 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ har eksakt én løsning for $a = -1$, og uttrykk løsningen $\mathbf{x}$ ved A og $\mathbf{b}$. Det er ikke nødvendig å regne ut løsningen $\mathbf{x}$ eksplisitt.

Oppgave 2.

Vi ser på funksjonen definert ved $f(x) = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$.

a) **(6p)** Finn asymptotene til f.

b) **(6p)** Regn ut $f'(x)$, og avgjør når f er avtagende.

Oppgave 3.
Regn ut disse integralene:

a) **(6p)** $\displaystyle\int 30(1-x)^5 \,\mathrm{d}x$

b) **(6p)** $\displaystyle\int \frac{12}{4 - 9x^2} \,\mathrm{d}x$

c) **(6p)** $\displaystyle\int \frac{2e^x}{e^x - e^{-x}} \,\mathrm{d}x$

Oppgave 4.
Vi kjøper en eiendom for utleie. Vi regner med å motta netto leieinntekter som en kontinuerlig inntektstrøm, slik at kontantstrømmen etter t år er gitt ved $I(t) = 12\,e^{0.07t}$ (i millioner kroner per år). Vi bruker kontinuerlig diskontering når vi regner nåverdi, med diskonteringsrente $r = 10\%$.

a) **(6p)** Finn nåverdien til inntektstrømmen vi mottar om vi leier ut eiendommen i all framtid.

b) **(6p)** Vi vurderer å selge eiendommen etter 7 år dersom nåverdien av salgssummen er minst like stor som nåverdien av framtidige leieinntekter. Hvor stor må salgssummen være for at vi skal vurdere å selge?

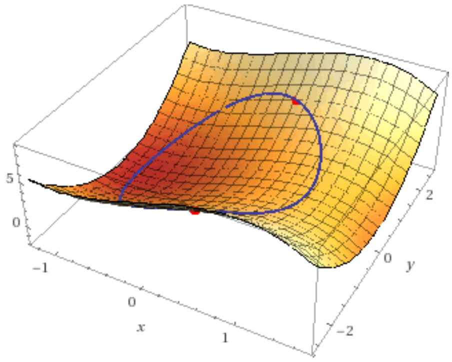
Oppgave 5.
Vi ser på funksjonen definert ved $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$, og kaller nivåkurven til f som går gjennom punktet $(x,y) = (-1,2)$ for C.

a) **(6p)** Finn alle stasjonære punkt for f, og klassifiser disse punktene.

b) **(6p)** Finn tangenten til C i punktet $(x,y) = (-1,2)$. Skjærer tangenten C i noen andre punkter?

c) **(6p)** Skisser kurven i xy-planet gitt ved $4x^2+y^2 = 4$. Hva slags kurve er dette? Er den begrenset?

d) **(6p)** Løs optimeringsproblemet: $\max f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$ når $4x^2 + y^2 = 4$



FIGUR 1. Illustrasjon for Oppgave 5

Oppgave 6.
Bonus (6p) Løs Lagrangeproblemet: $\min f(x,y) = x$ når $y^2 - x^3 + 3x = 2$

Formelsamling

1 Finansmatematikk

Geometriske rekker. En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier. Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er henholdsvis

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

2 Integrasjon

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \,\mathrm{d}x = uv - \int uv' \,\mathrm{d}x$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \,\mathrm{d}x = \int f(u) \,\mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \mathrm{d}x$$

Areal. Regionen gitt ved $f(x) \leq y \leq g(x)$ for $a \leq x \leq b$ har areal

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \,\mathrm{d}x$$

3 Lineær algebra

Cramers regel. Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \ldots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ er matrisen som framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med $\mathbf{b}$.

4 Funksjoner i flere variable

Annenderivert-testen. Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x,y)$ er et

a) lokalt minimum om $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
b) lokalt maksimum om $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
c) sadelpunkt om $AC - B^2 < 0$

når vi setter $A = f''_{xx}(x^*, y^*)$, $B = f''_{xy}(x^*, y^*)$ og $C = f''_{yy}(x^*, y^*)$.

Nivåkurver. På nivåkurven $f(x,y) = c$ er den deriverte $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gitt ved

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Totalderivasjon. Når $z = f(x,y)$, og vi har $x = x(t)$ og $y = y(t)$, så er den totalderiverte

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$